PRACE TOWARZYSTWA PRZYJACIÓŁ NAUK W WILNIE
WYDZIAŁ NAUK MATEMATYCZNYCH I PRZYRODNICZYCH

TRAVAUX DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETRES DE WILNO
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES T. XIII

BULLETIN DU SÉMINAIRE MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE WILNO

2

POUR LES ÉCHANGES S'ADRESSER AU SÉMINAIRE MATHÉMATIQUE,
UNIVERSITÉ STEFAN BATORY, ZAMKOWA 11, WILNO, POLOGNE.

WILNO 1939

Z ZASIŁKU FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ JÓZEFA PIŁSUDSKIEGO.

ZAKŁADY GRAFICZNE „ZNICZ", WILNO, UL. BISKUPA BANDURSKIEGO 4.

ANTONI ZYGMUND

O pewnem twierdzeniu Fejéra.

Sur un théorème de M. Fejér.

(Komunikat zgłoszony na posiedzeniu w dniu 25.XI 1938 r.).

On doit à M. Fejér la proposition suivante: [1])

Soit

(1) $$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

une fonction régulière dans le cercle unité $|z| < 1$ *et telle que l'intégrale double*

(2) $$\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} |f'(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta$$

soit finie. Alors la série (1) *converge presque partout sur la circonférence* $|z| = 1$. *Si de plus la fonction* $f(z)$ *est continue sur un arc fermé de la circonférence* $|z| = 1$, *la série* (1) *converge uniformément sur cet arc.*

Ce théorème n'est au fond qu'un théorème du type tauberien, car la valeur de l'intégrale (2) étant égale à

(3) $$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n\, |a_n|^2,$$

le théorème de M. Fejér peut être déduit (ce que d'ailleurs fait M. Fejér) du lemme suivant: Si la série (3) est finie, alors l'existence de la limite

(4) $$\lim_{r \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

entraîne la convergence de la série

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\theta};$$

---

[1]) Voir par exemple E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neueren Ergebnisse der Funktionentheorie, 2e Ausg., Berlin 1929.

si la limite (4) existe uniformément pour certaines valeurs de θ, la série (5) converge uniformément pour ces valeurs de θ.

On peut même s'appuyer directement sur le théorème classique de Tauber[1]), car en appliquant l'inégalité de Schwarz on voit facilement que la convergence de la série (3) entraîne la relation

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| \rightarrow 0.$$

Si Ω désigne l'ensemble des points $f(z)$ pour $|z|<1$, alors, comme on le sait bien, l'intégrale (2) représente l'aire de l'ensemble Ω, points multiples comptés multiplement.

Le but principal de cette note est de démontrer que le théorème de M. Fejér peut être localisé. Plus précisement nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit* (1) *le développement de Taylor d'une fonction $f(z)$ régulière dans le cercle $|z|<1$ et soit Γ un domain contenu dans ce cercle et limité par une courbe de Jordan ayant l'arc $z=e^{i\theta}$, $\alpha\leq\theta\leq\beta$, commun avec la circonférence $|z|=1$. Si les coefficients a_n tendent vers 0 et si l'intégrale double*

$$\text{(5a)} \qquad \iint_{\Gamma} |f'(\rho e^{i\theta})|^2\, \rho d\rho d\theta$$

est finie, alors la série (5) *converge presque partout sur l'arc $z=e^{i\theta}$, $\alpha\leq\theta\leq\beta$.*

Si de plus la fonction $f(z)$ est continue en tout point intérieur ou frontière du domain Γ, la série (5) *converge uniformément sur tout arc* (α', β') *intérieur à* (α, β).

Il est évident que sans restreindre la généralité des raisonnements nous pouvons supposer que le domain Γ est tout simplement le secteur $0<r<1$, $\alpha<\theta<\beta$.

La condition $a_n \rightarrow 0$ est indispensable pour que la série (1) ait au moins un point de convergence sur la circonférence $|z|=1$.

Ajoutons encore que le théorème 1 donne réponse à un problème posé dans un travail de M. Lusin[2]).

---

[1]) Le théorème de Tauber assert que si une série $u_0+u_1+\ldots.$ satisfait aux conditions

$$\lim_{r\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n = s, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k u_k \rightarrow 0,$$

alors là série $u_0+u_1+\ldots$ converge vers s. Cf. par exemple Landau, loc. cit.

[2]) Voir N. Lusin, Sur une propriété des fonctions à carré sommable (*Bull. of the Calcutta Math. Soc.*, XXI, 1930, p. 139—154). M. Lusin y mentionne que le problème est dû à M. Orbéc.

Nous donnons deux démonstrations du théorème 1. La première sera basée sur la multiplication formelle des séries trigonométriques, dont la théorie a été developpée par M. Rajchman[1]).

Nous commençons par rappeler les définitions.

Considérons deux séries trigonométriques

(6) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta},$$

(7) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{in\theta}.$$

(Par la somme, ordinaire ou généralisée, d'une série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n$ infinie dans les deux sens nous entendons la limite, ordinaire ou généralisée, des sommes partielles symétriques $s_N = \sum_{n=-N}^{N} u_n$, pour $N \to +\infty$). On appelle *produit formel* des séries (6) et (7) la série trigonométrique

(8) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}$$

dont les coefficients sont données par les formules

(9) $$C_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p \gamma_{n-p} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Si, par exemple, les coefficients c_n de la série (6) tendent vers 0 pour $n \to \pm\infty$, et si la série $\sum_{p=-\infty}^{\infty} |\gamma_p|$ converge, alors les séries définissant les nombres C_n convergent absolument.

Lemme 1. *Supposons que les nombres c_n tendent vers 0 pour $|n| \to \infty$ et que $\gamma_n = O(|n|^{-3})$. Désignons par $\lambda(\theta)$ la somme de la série* (7) *et par $s_n(\theta)$, $S_n(\theta)$ les sommes partielles (symétriques) de la série* (6) *et du produit formel* (8) *des séries* (6) *et* (7). *Alors la différence*

$$S_n(\theta) - \lambda(\theta)\, s_n(\theta)$$

tend uniformément vers 0 pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $n \to +\infty$.

En d'autres mots la série

(10) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n - \lambda(\theta)\, c_n)\, e^{in\theta}$$

converge uniformément vers 0.

---

[1]) Voir par exemple A. Rajchman, Sur la multiplication des séries trigonométriques (*Math. Annalen* 95 (1926), 388-408) ou A. Zygmund, Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques (*Math. Zeitschrift* 24 (1926), 47-104). Certains résultats sont réproduits dans le livre de l'auteur Trigonometrical Series (*Monografie Matematyczne* V, Warszawa 1935, pp. 1-332, spéc. pp. 279-283).

Ce lemme est connu [1]).

La série (10) étant uniformément convergente, elle est a plus forte raison uniformément sommable par le procédé d'Abel [2]). Nous obtenons ainsi le suivant

Corollaire. *Sous les hypothèses du lemme* 1, *si la série* (6) *est uniformément sommable par le procédé d'Abel dans un intervalle il en est de même du produit formel* (8).

Lemme 2. a) *Supposons que les nombres* c_n *tendent vers* 0 *pour* $|n|\to\infty$, *que* $\gamma_n = O(|n|^{-5})$ *et que la dérivée* $\lambda'(\theta)$ *de la somme* $\lambda(\theta)$ *de la série* (7) *s'évanouisse dans un intervalle* (a, b) *(qui peut d'ailleurs se reduire à un point). Alors, si* $\sigma_n(\theta)$ *et* $\tau_n(\theta)$ *désignent respectivement les premières moyennes arithmétiques de la série* (6) *et du produit formel* (8), *la différence*

$$(11) \qquad \frac{d}{d\theta}\tau_n(\theta) - \lambda(\theta)\frac{d}{d\theta}\sigma_n(\theta)$$

tend uniformément vers 0 *pour* $n\to\infty$ *et* $a\leq\theta\leq b$.

b) *Si la fonction* $\lambda(\theta)$ *et l'intervalle* (a, b) *dépendent d'un paramètre* t, *la différence* (11) *tend vers* 0 *uniformément en* t *et* θ *de* (a, b).

Ce lemme est aussi connu [3]).

Etant donnée une série trigonométrique (8), nous appelons *fonction harmonique correspondante* la fonction harmonique

$$(12) \qquad U(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta} r^{|n|}.$$

Lemme 3. a) *Si pour la fonction harmonique (réelle ou complèxe)* $U(r, \theta)$ *donnée par la formule* (12) *l'intégrale*

$$(13) \qquad \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial}{\partial\theta} U(r, \theta)\right|^2 d\theta$$

est finie, alors la série trigonométrique (8) *converge pour presque tout* θ. *Si de plus la fonction* $U(r, \theta)$ *est continue dans le secteur,* $0\leq r\leq 1$, $\alpha\leq\theta\leq\beta$, *la série* (8) *converge uniformément dans l'intervalle* (α, β).

---

[1]) Voir A. Rajchman, *loc. cit*, ou A. Zygmund, Trigonometrical Series, 280.

[2]) On dit que la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n$ est sommable par le procédé d'Abel vers la somme s, si

$$\lim_{r\to 1-0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n r^{|n|} = s.$$

[3]) Voir A. Zygmund, *Math. Zeitschr., loc. cit.* La partie b) du lemme n'y est pas formulée explicitement, mais sa démonstration est exactement la même que celle de la partie a).

Ce lemme ne diffère pas essentiellement du théorème de M. Fejér formulé au début de cette note. En effet, si l'intégrale (13) est finie, il en est de même de l'intégrale

$$(14) \qquad \int_0^1 \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} U(r, \theta) \right|^2 d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{dr}{r} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \, |C_n|^2 \, r^{|2n|} \right) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (|C_n|^2 + |C_{-n}|^2)\, n \, .$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz, on voit que si la dernière série converge on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (|C_{-k}| + |C_k|)\, k \to 0,$$

et l'application du théorème de Tauber achève la démonstration de la première partie du lemme. La seconde partie se démontre d'une façon tout à fait analogue.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Soit $\lambda(\theta)$ une fonction de période 2π ayant cinq premières dérivées continues, égale à 1 dans l'intervalle (α', β') et égale à 0 à l'extérieur de l'intervalle (α, β) (mod 2π). Soit (7) la série de Fourier de $\lambda(\theta)$ (les coefficients γ_n sont donc $O(|n|^{-5})$ et soit (8) le produit formel de la série trigonométrique (5) par la série (7). Désignons par $U(r, \theta)$ la fonction harmonique correspondant à ce produit. Supposons pour un moment que nous ayons démontré que l'intégrale (13) est finie pour cette fonction harmonique. En vertu du lemme 3, la série (8) converge pour presque tout θ. Si l'on applique maintenant le lemme 1, on voit que la série (5) converge presque partout dans l'intervalle (α', β') (car la fonction $\lambda(\theta)$ diffère de 0 dans cet intervalle). Comme pour (α', β') nous pouvons prendre chaque intervalle intérieur à (α, β), la série (5) converge presque partout dans (α, β).

Pareillement, si l'intégrale (13) est finie et la fonction $U(r, \theta)$ est continue dans le secteur $0 \leq r < 1$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, la série (8) converge, en vertu de la seconde partie du lemme 3, uniformément dans l'intervalle (α', β'). Ceci entraîne, d'après le lemme 1, la convergence uniforme de la série (5) dans l'intervalle (α', β').

Nous voyons ainsi que le théorème sera établi, si nous pouvons démontrer que

α) *sous les hypothèses du théorème* 1 *l'intégrale* (13) *est finie*, $U(r, \theta)$ *désignant la fonction harmonique correspondant au produit formel de la série* (5) *par la série de Fourier de* $\lambda(\theta)$.

β) *Sous les hypothèses de la seconde partie du théorème* 1, *la fonction* $U(r, \theta)$ *est continue dans le secteur fermé* $0 \leq r \leq 1$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

Pour démontrer α) observons que l'intégrale (13) est égale à

$$\int_0^1 dr \int_\alpha^\beta \left| \frac{\partial}{\partial \theta} U(r, \theta) \right|^2 d\theta + \int_0^1 dr \int_\beta^{\alpha+2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} U(r, \theta) \right|^2 d\theta = A + B.$$

Il est facile de voir que l'intégrale B est finie. En effet, d'aprés le lemme 2, les premières moyennes arithmétiques du produit formel (8) différentié terme à terme tendent vers 0 uniformément dans l'intervalle $(\beta, \alpha + 2\pi)$. Il en résulte à plus forte raison que la série (8) différentiée terme à terme est uniformément sommable vers 0 par le procédé d'Abel $(\beta \leq \theta \leq \alpha + 2\pi)$. En d'autres mots

$$\frac{\partial}{\partial \theta} U(r, \theta) \rightarrow 0$$

pour $r \rightarrow 1$, uniformément dans $(\beta, \alpha + 2\pi)$. Ceci prouve que B est fini.

Pour démontrer que l'intégrale A est finie nous avons besoin du lemme suivant:

Lemme 4. *Soit* $\lambda(\theta)$ *une fonction de période* 2π *dont les coefficients de Fourier sont* $O(|n|^{-5})$ *et soit* $U(r, \theta)$ *la fonction harmonique correspondant au produit formel* (8) *de la série* (5) *par la série de Fourier de* $\lambda(\theta)$. *Alors pour* $0 \leq r < 1$ *et* $0 \leq \theta \leq 2\pi$ *nous avons*

$$(15) \qquad \left| \frac{\partial}{\partial \theta} U(r, \theta) \right| \leq K_1 \left(|f'(re^{i\theta})| + |f(re^{i\theta})| \right) + K_2,$$

où K_1 *et* K_2 *sont des constantes indépendantes de* r *et* θ.

En effet, soit

$$T(\theta; \theta_0) = \lambda(\theta_0) + \lambda'(\theta_0) \sin(\theta - \theta_0)$$

le polynôme trigonométrique en θ ayant la même valeur et la même dérivée au point $\theta = \theta_0$ que la fonction $\lambda(\theta)$. Le produit formel (8) est égal à la somme du produit formel de la série (5) par la série de Fourier de la fonction $\lambda(\theta) - T(\theta; \theta_0)$ et du produit formel de la série (5) par le polynôme

$$T(\theta; \theta_0) = -\lambda'(\theta_0) \tfrac{1}{2} i e^{-i\theta_0} e^{i\theta} + \lambda(\theta_0) + \lambda'(\theta_0) \tfrac{1}{2} i e^{i\theta_0} e^{-i\theta}$$

Désignons ces produits formels respectivement S_1 et S_2. D'après le lemme 2 le produit S_1 différentié terme à terme est sommable vers 0 par le procédé de la première moyenne arithmétique dans le point $\theta = \theta_0$. D'après la seconde partie du même lemme la sommabilité est uniforme en θ_0. En désignant par $U_1(r, \theta; \theta_0)$ et $U_2(r, \theta; \theta_0)$

les fonctions harmoniques correspondant aux produits S_1 et S_2, nous voyons donc que

$$(16) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial\theta} U_1(r, \theta; \theta_0)\right|_{\theta=\theta_0} \leq K_3 \qquad (0 \leq r < 1)$$

où K_3 est une constante indépendante de r et θ_0. D'autre part

$$\frac{\partial}{\partial\theta} U_2(r, \theta; \theta_0) = \lambda(\theta_0)\, i \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\theta} n r^n +$$

$$+ \lambda'(\theta_0) \tfrac{1}{2} e^{-i\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n+1) e^{i(n+1)\theta} r^{n+1} -$$

$$- \lambda'(\theta_0) \tfrac{1}{2} e^{i\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n-1) e^{i(n-1)\theta} r^{n-1}.$$

Nous en déduisons facilement que l'inégalité qu'on obtient de (15) en y remplaçant $U(r, \theta)$ par $U_2(r, \theta; \theta_0)$ est sûrement vraie. En tenant compte de ce fait, de l'inégalité (16) et de la relation $U(r, \theta) = U_1(r, \theta; \theta_0) + U_2(r, \theta; \theta_0)$, on obtient (15)

Nous pouvons maintenant démontrer que l'intégrale A est finie. D'après l'inégalité (15) cette intégrale n'excède pas

$$(17) \qquad 4\, K_1^2 \int_0^1 dr \int_\alpha^\beta |f'(re^{i\theta})|^2\, d\theta + 4\, K_1^2 \int_0^1 dr \int_\alpha^\beta |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta + 8\pi K_2^2.$$

En vertu de l'hypothèse concernant l'intégrale (5a) la première intégrale est finie. En intégrant l'inégalité

$$|f(re^{i\theta})|^2 = \left|\int_0^r f'(\rho e^{i\theta})\, d\rho\right|^2 \leq \int_0^1 |f'(\rho e^{i\theta})|^2\, d\rho$$

dans le secteur $0 \leq \rho \leq 1$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, on voit que la seconde intégrale dans (17) est aussi finie. Ceci prouve que l'intégrale A, donc aussi l'intégrale (13) est finie. Nous avons ainsi démontré la proposition α), donc aussi la première partie du théorème 1.

Pour démontrer la proposition β) (et par conséquent la seconde partie du théorème 1) il suffit d'observer que si la fonction $f(z)$ est continue dans le secteur $0 \leq r \leq 1$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, la fonction $U(r, \theta)$ est aussi continue dans ce secteur (cf. le corollaire du lemme 1).

Le théorème 1 est donc démontré.

Le théorème 1 peut être étendu aux séries (1) dont les coefficients sont $o\,(n^\gamma)$:

Théorème 2. *Si dans le théorème* 1 *on remplace la condition* $a_n = o\,(1)$ *par la condition* $a_n = o\,(n^\gamma)$, $\gamma \geq 0$, *le théorème reste vrai, pourvu que l'on y remplace simultanément le mot „converge", par „sommable* (C, γ)*".*

Il suffit évidemment de se borner au cas de $\gamma > 0$. Dans ce cas le théorème peut être déduit facilement des résultats connus. Observons à cet effet que si $0 < r_1 \leq r_2 < 1$, l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(r_2 e^{i\theta}) - f(r_1 e^{i\theta})|^2 d\theta =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \, \left| \int_{r_1}^{r_2} f'(\rho e^{i\theta}) d\rho \right|^2 \leq (r_2 - r_1) \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1}^{r_2} |f'(\rho e^{i\theta})|^2 d\rho$$

tend vers 0 pour $r_1 \to 1$, $r_2 \to 1$. Il existe par conséquent une fonction $f(e^{i\theta})$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, de carré intégrable et telle que

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|^2 d\theta \to 0 \text{ pour } r \to 1.$$

Il en résulte en particulier que

$$\int_{\alpha}^{\theta} \{ f(e^{iu}) - f(re^{iu}) \} du \longrightarrow 0$$

uniformément pour $\alpha \leq \theta \leq \beta$. On en déduit facilement que si l'on intégre la série (1) terme à terme k fois la série obtenue est uniformément sommable dans l'intervalle (α, β) par le procédé d'Abel, vers la k'ième intégrale de la fonction $f(e^{i\theta})$. Si $k > \gamma + 1$, la série intégrée sera même uniformément et absolument convergente. En vertu des théorèmes sur la localisation pour les séries à coefficients $o\,(n^{\gamma})$, la série (1) est uniformément équisommable (C, γ), dans tout intervalle (α', β') intérieur à (α, β), avec la série de Fourier de la fonction $g(\theta)$ égale à $f(e^{i\theta})$ dans l'intervalle (α, β) et égale à 0 ailleurs[1]). La série de Fourier d'une fonction intégrable L étant sommable (C, γ) pour presque tout θ, la série (5) est sommable presque partout dans l'intervalle (α, β). Ceci donne cette partie du théorème 2 qui correspond à la première partie du théorème 1. Le reste du théorème 2 se démontre d'une façon analogue.

Ajoutons que le même raisonnement peut servir pour obtenir une nouvelle démonstration du théorème 1. On peut notamment démontrer (voir le lemme 5 plus loin) que la fonction limite $f(e^{i\theta})$ appartient à la classe Lip $(\frac{1}{2}, 2)$ dans chaque intervalle (α', β') intérieur à (α, β). Il suffit alors de s'appuyer sur le fait connu que la série de Fourier d'une fonction appartenant dans l'intervalle (α', β') à la classe Lip $(\frac{1}{2}, 2)$

---

[1]) Voir, par exemple, A. Zygmund, *Math. Zeitschr.*, loc. cit.

converge presque partout dans (α', β'); si la fonction est continue en tout point de l'intervalle (α', β') la série converge uniformément dans cet intervalle [1]).

Lemme 5. *Si l'intégrale*

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{0}^{1} |f'(re^{i\theta})|^2 \, rdr$$

est finie, la fonction limite $f(e^{i\theta})$ *appartient à Lip* $(\frac{1}{2}, 2)$ *dans chaque intervalle* (α', β') *intérieur à* (α, β). *Plus précisement, on a*

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} |f(e^{i(\theta+h)}) - f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta = o(|h|)$$

pour $h \to 0$.

Supposons pour simplicité que $h > 0$. Si les points θ et $\theta + h$ appartiennent à l'intervalle (α, β) et si les valeurs $f(e^{i(\theta+h)})$ et $f(e^{i\theta})$ existent, on a

$$|f(e^{i(\theta+h)}) - f(e^{i\theta})| \leq$$

$$\leq \left|\int_{C_1} f'(z)\,dz\right| + \left|\int_{C_2} f'(z)\,dz\right| + \left|\int_{C_3} f'(z)\,dz\right| = P + Q + R,$$

où C_1 désigne le segment $z = \rho e^{i\theta}$, $1 - h \leq \rho \leq 1$, C_2 désigne l'arc $z = (1-h)e^{iu}$, $\theta \leq u \leq \theta + h$ et C_3 désigne le segment $z = \rho e^{i(\theta+h)}$, $1 - h \leq \rho \leq 1$.

On voit facilement que

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} A^2 \, d\theta \leq h \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{1-h}^{1} |f'(\rho e^{i\theta})|^2 \, d\rho = o(h),$$

et de la même façon on prouve que $\int_{\alpha'}^{\beta'} C^2 \, d\theta = o(h)$.

Soit maintenant (α'', β'') un intervalle contenant (α', β') et contenu dans (α, β). Posons $r_h = 1 - h$. Pour h suffisamment petit on a

$$(18) \qquad \int_{\alpha'}^{\beta'} B^2 \, d\theta \leq h \int_{\alpha'}^{\beta'} d\theta \int_{\theta}^{\theta+h} |f'(r_h e^{iu})|^2 \, du \leq h^2 \int_{\alpha''}^{\beta''} |f'(r_h e^{i\theta})|^2 \, d\theta.$$

---

[1]) C'est une conséquence du critère bien connu de M. Lebesgue (voir Hardy and Littlewood, A convergence criterion for Fourier series, *Math. Zeitschr.*, 28 (1928), 612—233.

Hardy et Littlewood ont aussi démontré (*loc. cit.*) que la série de Fourier de toute fonction de la classe Lip $(\frac{1}{2}, 2)$ est sommable presque partout (C, γ), pourvu que $\gamma > -\frac{1}{2}$. En utilisant ce résultat on peut remplacer dans le théorème 2 l'inégalité $\gamma \geq 0$ par l'inégalité $\gamma > -\frac{1}{2}$.

Observons maintenant que si z_0 est un point quelconque de l'arc $z = r_h e^{iu}$ $(\alpha'' \leq u \leq \beta'')$, si h est suffisamment petit et $0 \leq \rho < h$ alors

$$|f'(z_0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(z_0 + \rho e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi.$$

En multipliant cette inégalité par ρ et intégrant dans l'intervalle $0 \leq \rho \leq h$, on obtient que

$$|f'(z_0)|^2 \leq \frac{1}{\pi h^2} \int_0^h \rho d\rho \int_0^{2\pi} |f'(z_0 + \rho e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi.$$

De cette inégalité et de l'inégalité (18) on deduit sans difficulté que

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} B^2 d\theta \leq K h \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{1-2h}^{1} |f'(\rho e^{i\theta})|^2 d\rho = o(h).$$

Ceci achève la démonstration du lemme 5[1]) et aussi la seconde démonstration du théorème 1.

Streszczenie.

Głównym wynikiem niniejszej pracy jest dowód następującego twierdzenia (będącego zlokalizowaniem znanego twierdzenia Fejéra):

Jeżeli $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ *jest funkcją holomorficzną dla* $|z| < 1$, *przyczem* $a_n \longrightarrow 0$, *zaś całka*

$$\iint |f'(z)|^2 \rho d\rho d\theta \qquad (z = \rho e^{i\theta})$$

rozciągnięta na wycinek kołowy $0 \leq \rho \leq 1$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, *jest skończona, to szereg* (*) $a_0 + a_1 e^{i\theta} + a_2 e^{2i\theta} + \ldots$ *jest zbieżny prawie wszędzie w przedziale* $\alpha \leq \theta \leq \beta$. *Jeżeli ponadto funkcja* $f(z)$ *jest ciągła wewnątrz i na obwodzie wspomnianego wycinka, to szereg* (*) *jest zbieżny jednostajnie na każdym łuku, leżacym wewnątrz łuku* (α, β).

---

[1]) Dans le cas où l'intervalle (α, β) se réduit à $(0, 2\pi)$ la démonstration du lemme 5 se simplifie considérablement par l'application de la formule de Parseval à la fonction $f(e^{i(\theta+h)}) - f(e^{i\theta}) = \sum a_n e^{in\theta} (e^{inh} - 1)$. L'intervalle (α', β') se réduit alors aussi à l'intervalle $(0, 2\pi)$.

STEFAN KEMPISTY

O funkcjach o wahaniu skończonem w znaczeniu Tonelli'ego.

Sur les fonctions à variation bornée au sens de Tonelli.

(Komunikat zgłoszony na posiedzeniu w dniu 25.XI. 1938 r.).

1. M. T. Radò a établi[1]) que l'aire d'une surface courbe $z = f(x, y)$ peut etre calculée par l'intégration au sens de Burkill d'une fonction de rectangle $G(f, R)$ introduite par Z. de Geöcze dans sa thèse: *Quadrature des surfaces courbes*[2]).

Comme la fonction G est définie au moyen de l'intégrale de Riemann, ce procédé de calcul se compose de deux passages à la limite. Nous allons voir qu' en se servant de l'intégrale supérieure de Burkill on peut calculer l'aire directement à partir d'une fonction $H(f, R)$ définie au moyen des minima des valeurs absolues de l'acroissement de f sur les segments parallèles aux axes. De plus la fonction H nous permet de caractériser les fonctions à variation bornée et les fonctions absolument continues au sens de Tonelli.

2. Considérons une fonction $f(x, y)$ continue dans le carré fondamental Q:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Soit $V_1(y; 0, 1)$ la variation totale de $f(x, y)$ par rapport à x dans l'intervalle linéaire: $0 \leq x \leq 1$. $V_1(y; 0, 1)$ est une fonction semi-continue inférieurement de la variable y.

Nous dirons que la fonction f est VBT_x ou *à variation bornée au sens de Tonelli par rapport à x* lorsque $V_1(y; 0, 1)$ est sommable dans l'intervalle (0,1).

---

1) *Sur le calcul des surfaces courbes*, Fund. Math. 10, 1927, 197—210.

2) Math. Nat. Berichte aus Ungarn 26, 1910, 1—88.

En désignant par R le rectangle:

$$a \leq x \leq a+h, \qquad b \leq x \leq b+k$$

posons

$$G_1(f, R) = \int_b^{b+k} |f(a+h, y) - f(a, y)|\, dy.$$

G_1 est une fonction de rectangle considérée par Z. de Geöcze dans sa thèse.

La fonction G_1 est continue et intégrable au sens de Burkill dans le carré Q et on a [1])

$$(2.1) \qquad \int_Q G_1 = \int_0^1 V_1(y; 0, 1)\, dy.$$

Par suite pour que f soit une fonction VBT_x il faut et il suffit que l'intégrale de G_1 soit, finie c'est à dire que G_1 soit à variation finie [2]).

3. Nous allons caractériser les fonction VBT_x au moyen d'une autre fonction de rectangle dont la définition ne demande pas de l'intégration.

Posons

$$(3.1) \qquad H_1(f, R) = k \cdot \min_{b \leq y \leq b+k} |f(a+h, y) - f(a, y)|$$

Théorème 1. *Nous avons*

$$(3.2) \qquad \overline{\int_Q} H_1 = \int_0^1 V_1(y; 0, 1)\, dy.$$

Par suite pour que $f(x, y)$ soit VBT_x il faut et il suffit que $H_1(f, R)$ soit une fonction à variation finie.

Pour le montrer déterminons le nombre $\delta_\varepsilon > 0$ de manière qu'on ait

$$(3.3) \qquad \sum_{i=1}^{n} H_1(R_i) \leq \overline{\int_Q} H_1 + \varepsilon$$

quelle que soit la subdivision D du carré fondamental en rectangles

$$R_1, R_2, \ldots\ldots, R_n$$

dont les cotés sont inférieures à δ_ε.

---

[1]) S. Saks, *Theory of Integral*, 1937 p. 172.

[2]) Une fonction de rectangle F sera appelée *à variation finie* quand l'intégrale supérieure de |F| est finie.

Parmi ces subdivisions D il existe une D^{ε} telle que

$$(3.4) \qquad \sum_{i=1}^{n} H_1(R_i^{\varepsilon}) > \overline{\int_Q} H_1 - \varepsilon.$$

En divisant chacun des intervalles R_i^{ε} par des droites parallèles à l'axe de x on remplace $H_1(R_i^{\varepsilon})$ par une somme au moins égale à $H_1(R_i^{\varepsilon})$.

En augmentant ensuite le nombre de ces droites on obtient à la limite la somme

$$\sum_{i=1}^{n} G_1(R_i^{\varepsilon})$$

qui diffère de ε au plus de l'intégrale supérieure de $H_1(R)$ en vertu des inégalités (3.3) et (3.4). Comme la fonction $G_1(R)$ est intégrable au sens de Burkill nous avons l'égalité

$$(3.5) \qquad \int_Q G_1 = \overline{\int_Q} H_1 .$$

Les égalités (2.1) et (3.5) entraînent l'égalité (3.2) de l'énoncé.

4. Soit $F(R)$ une fonction de rectangle R. La limite supérieure (inférieure) du quotient $F(R)/|R|$ pour les rectangles R contenant le point (x, y) et tels que

$$0 < \lambda \leq \frac{h}{k} \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \max(h, k) \to 0$$

sera appellée *derivée supérieure* (*inférieure*) *λ-régulière* de la fonction F au point x et sera désignée par $\overline{D}^{\lambda}_{xy}F$ (resp. $\underline{D}^{\lambda}_{xy}F$). La valeur commune de ces deux dérivées extrêmes est la *dérivée λ-régulière* de F: $D^{\lambda}_{xy}F$.

Désignons par J_1 l'intégrale supérieure de H_1 dans R.

Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 2. *Si $f(x, y)$ est continue et VBT_x dans Q, on a presque partout*

$$D^{\lambda}_{xy} J_1 = |f_x|.$$

En effet nous avons d'abord

$$J_1(R) = \overline{\int_R} H_1 = \int_b^{b+k} V_1(y; a, a+h)\, dy \geq \int\!\!\int_R |f_x|\, dxdy,$$

donc

$$(4.1) \qquad \underline{D}^{\lambda}_{xy} J_1 \geq |f_x|$$

presque partout dans Q.

D'autre part on a presque partout

$$\overline{D}^{\lambda}_{xy} J_1 \leq D^{\lambda}_{xy} G_1 = |f_x|$$

en vertu du théorème 6.1 de la monographie de M. S. Saks où $\lambda = 1$ [1]) puisque

$$J_1(R) \leq G_1(R).$$

En réproduisant le raisonnement de M. Saks on pourrait d'ailleur obtenir directement la relation

$$(4.2) \qquad \overline{D}^{\lambda}_{xy} J_1 \leq |f_x|.$$

Les relations (4.1) et (4.2) entraînent l'égalité de l'énoncé.

Corollaire 1. *Si $f(x, y)$ est continue et VBT_x dans Q, on a*

$$\overline{D}^{\lambda}_{xy} H_1 = |f_x|$$

presque partout dans Q.

En effet il résulte d'un théorème de M. Saks sur les dérivées extrêmes des intégrales extrêmes, étendu aux fonctions de rectangle [2]) qu'on a presque partout

$$\overline{D}^{\lambda}_{xy} H_1 = D^{\lambda}_{x} J_1.$$

5. En permutant les rôles des variables x et y, on définit les fonctions VBT_y, la variation $V_2(x; 0,1)$ et les fonctions:

$$G_2(f, R) = \int_a^{a+h} |f(x, b+k) - f(x, b)| \, dx,$$

$$H_2(f, R) = h \min_{a \leq x \leq a+h} |f(x, b+k) - f(x, b)|.$$

On obtient ensuite les théorèmes analogues aux ceux du paragraphe précédent:

Théorème 1'. *Si $f(x, y)$ est continue, on a*

$$J_2(f, Q) = \overline{\int_Q} H_2 = \int_0^1 V_2(x; 0, 1) \, dx = \int_Q G_2.$$

---

[1]) loc. cit. p. 174.

[2]) v. Kempisty, *Sur les fonctions absolument semi-continues*, Fundamenta Math. t. 30, 1938, p. 109, le théorème 10 qui subsiste pour les intégrales qui ne sont pas λ-régulières.

Théorème 2'. *Si $f(x, y)$ est continue et VBT_y on a*

$$\overline{D}^{\lambda}_{xy} H_2 = D^{\lambda}_{xy} J_2 = |f_x|$$

presque partout dans Q.

6. Une fonction continue est VBT ou *à variation bornée au sens de Tonelli* lorsqu'elle est en même temps VBT_x et VBT_y.

Posons

$$G(f,R) = \left[|R|^2 + G_1{}^2 + G_2{}^2\right]^{1/2}, \quad H(f,R) = \left[|R|^2 + H_1{}^2 + H_2{}^2\right]^{1/2}.$$

Désignons ensuite par $A(f, Q)$ l'aire au sens de Lebesgue de la surface $z = f(x, y)$. Nous allons démontrer les deux théorèmes suivants.

Thèoréme 3. *Lorsque les dérivées partielles de $f(x, y)$ sont continues, nous avons l'égalité double*

$$\int_Q H(f, R) = \iint_Q \left[1 + f_x^2 + f_y^2\right]^{1/2} dxdy = A(f, Q).$$

En effet soient x_1 et y_1 les nombres tels que: $a \leq x_1 \leq a + h$,

$$\min_{b \leq y \leq b+h} \mapsto |f(a+h,y) - f(a,y)| = |f(a+h,y_1) - f(a,y_1)| = f_x(x_1, y_1)\, h.$$

Nous avons donc

$$H_1(f,R) = f_x(x_1, y_1) \cdot |R|.$$

De même soient x_2 et y_2 tels que

$$H_2(f,R) = f_y(x_2, y_2) \cdot |R|.$$

Par suite

$$H(f,R) = \left[1 + f_x^2(x_1, y_1) + f_y^2(x_2, y_2)\right]^{1/2}.$$

Les dérivées partielles de f étant continues, la fonction H est intégrable et

$$\int_Q H(f, R) = \iint_Q \left[1 + f_x^2 + f_y^2\right]^{1/2} dxdy.$$

Or cet intégrale est égale à l'aire de la surface courbe.

Théorème 4. *Si $f(x,y)$ est continue et VBT dans Q, on a*

$$A(f, Q) = \overline{\int_Q} H(f,R).$$

Suivons un raisonnement de M. Radò[1]).

Posons

$$f_n(x, y) = n^2 \int_0^{1/n} \int_0^{1/n} f(x+\xi,\ y+\eta)\ d\xi\, d\eta.$$

Cette fonction est définie en tous les points du carré Q_n:

$$0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}, \quad 0 \leq y \leq 1 - \frac{1}{n}$$

Comme

$$|f_n(a+h, y) - f_n(a, y)| \leq n^2 \int_0^{1/n} \int_0^{1/n} |f(a+h+\xi, y+\eta) - f(a+\xi, y+\eta)|\ d\xi\, d\eta,$$

nous avons

$$(6.1) \qquad H(f_n, R) \leq n^2 \int_0^{1/n} \int_0^{1/n} H(f, R_{\xi\eta})\ d\xi\, d\eta$$

$R_{\xi\eta}$ étant le rectangle qu'on obtient par la translation

$$X = x + \xi, \quad Y = y + \eta$$

du rectangle R.

Soient

$$R_1, R_2, \ldots\ldots, R_p$$

les rectangles d'une subdivision D de Q. Lorsque les longueurs des cotés de ces rectangles sont inférieures à un nombre positif δ_ε, suffisamment petit, nous avons l'inégalité

$$(6.2) \qquad \sum_{i=1}^{p} H(f, R_i) < \overline{\int_Q} H(f, R) + \varepsilon.$$

D'autre part il existe une division, soit $D^\varepsilon = \left\{ R_1^\varepsilon, R_2^\varepsilon, \ldots, R_p^\varepsilon \right\}$, de Q_n telle que

$$(6.3) \qquad \sum_{i=1}^{p} H(f_n, R_i^\varepsilon) > \int_{Q_n} H(f_n, R) - \varepsilon.$$

Par suite

$$(6.4) \qquad \sum_{i=1}^{p} H(f_n, R_i^\varepsilon) < n^2 \int_0^{1/n} \int_0^{1/n} \sum_{i=1}^{p} H(f, R_{i\xi\eta}^\varepsilon)\ d\xi\, d\eta.$$

---

[1]) loc. cit. p. 209.

Mais la fonction H est non négative et les rectangles $R^{\varepsilon}_{i\xi\eta}$ sont tous contenus dans Q. Nous pouvons donc compléter le système des rectangles $R^{\varepsilon}_{i\xi\eta}$ de manière qu'il fasse la partie d'une division de Q.

Donc, en vertu de (6.2),

$$\sum_{i=1}^{p} H(f, R^{\varepsilon}_{i\xi\eta}) < \overline{\int_Q} H(f, R) + \varepsilon . \tag{6.5}$$

Les inégalités (6.3), (6.4) et (6.5) entraînent la relation

$$\int_{Q_n} H(f_n, R) \leq \overline{\int_Q} H(f, R),$$

Mais les dérivées partielles de $f(x, y)$ sont continues. De plus on a

$$A(f_n, Q_n) = \int_{Q_n} H(f_n, R),$$

Par conséquent

$$A(f_n, Q_n) \leq \overline{\int_Q} H(f, R). \tag{6.6}$$

Comme l'aire $A(f, Q)$ est une fonction semicontinue inférieurement par rapport à f et Q nous avons, en faisant tendre n vers l'infini,

$$A(f, Q) \leq \overline{\int_Q} H(f, R).$$

D'autre part $H \leq G$, donc

$$\overline{\int_Q} H(f, R) \leq \int_Q G(f, R) = A(f, Q).$$

Les relations (6.6) et (6.7) donnent l'égalité de l'énoncé.

Posons

$$J(f, R) = \overline{\int_R} H(f, I).$$

Théorème 5. *Si $f(x, y)$ est une fonction continue et VBT dans Q, on a*

$$\overline{D}^{\lambda}_{xy} H = D^{\lambda}_{xy} J = \left[1 + f_x^2 + f_y^2\right]^{1/2}$$

presque partout dans Q.

En effet, nous avons presque partout

$$(6.1)\qquad D^{\lambda}_{xy}\left[|R|^2 + J_1{}^2 + J_2{}^2\right]^{1/2} = \left[1 + (D^{\lambda}_{xy}J_1)^2 + (D^{\lambda}_{xy}J_2)^2\right]^{1/2} =$$
$$= \left[1 + (\overline{D}^{\lambda}_{xy}H_1)^2 + (\overline{D}^{\lambda}_{xy}H_2)^2\right]^{1/2} \geq \overline{D}^{\lambda}_{xy}H .$$

Mais

$$\left[|R|^2 + J_1{}^2 + J_2{}^2\right]^{1/2} \leq \overline{\int_R} \left[|I|^2 + H_1{}^2 + H_2{}^2\right]^{1/2} = J(R),$$

donc, presque partout dans Q,

$$D^{\lambda}_{xy}\left[|R|^2 + J_1{}^2 + J_2{}^2\right]^{1/2} \leq D^{\lambda}_{xy}J = \overline{D}^{\lambda}_{xy}H .$$

De (6.1) et (6.2) on déduit l'égalité

$$D^{\lambda}_{xy}J = \overline{D}^{\lambda}_{xy}H = \left[1 + (D^{\lambda}_{xy}J_1)^2 + (D^{\lambda}_{xy}J_2)^2\right]^{1/2} = \left[1 + f_x^2 + f_y^2\right]^{1/2}.$$

7. Une fonction $f(x, y)$ est ACT_x ou *absolument continue par rapport à x au sens de T o n e l l i* lorsqu'elle est continue, VBT_x et absolument continue par rapport à x pour les valeurs de y dont l'ensemble est de mesure 1 sur l'intervalle $0 \leq y \leq 1$.

Comme dans ce cas

$$V_1(y; 0, 1) = \int_0^1 |f_x|\, dx ,$$

nous avons, en vertu du théorème de F u b i n i et de l'égalité (2.1)

$$\int_Q G_1 = \iint_Q |f_x|\, dx\, dy$$

et la même égalité subsiste dans tout rectangle R contenu dans Q.

Par conséquent pour que $f(x, y)$ soit ACT_x il faut et il suffit que $\int_R G_1$ donc $G_1(f, R)$ soit une fonction absolument continue de rectangle R.

En effet $G_1 \leq \int_R G_1$, donc G_1 est absolument continue en même temps que son intégrale.

Nous allons établir une propriété analogue de la fonction $H_1(f, R)$.

Théorème 6. *Pour que $f(x, y)$ soit ACT_x il faut et il suffit que $H_1(f, R)$ soit une fonction absolument continue de rectangle R.*

En effet nous avons montré que

$$\overline{\int_R} H_1 = \int_R G_1 .$$

Comme $$H_1 \leq G_1 \leq \int\limits_R G_1,$$

la fonction H_1 est absolument continue dès que l'est son intégrale supérieure. L'inverse est évident.

On définit de la même manière les fonctions ACT_y. La fonction $f(x,y)$ est ACT ou *absolument continue au sens de Tonelli* lorsqu'elle est ACT_x et ACT_y en même temps.

Corollaire. *Pour que $f(x,y)$ soit ACT il faut et il suffit que $H(f,R)$ soit une fonction absolument continue. Dans ce cas nous avons*

$$\overline{\int\limits_Q} H(f,R) = \iint\limits_Q \left[1 + f_x^2 + f_y^2\right]^{1/2} dxdy.$$

En effet si H est absolument continue, il en est de même de son intégrale J, donc J est égale à l'intégrale de $D_{xy}^{\lambda} J$.

Streszczenie.

T. Radò stwierdził, że pole powierzchni krzywej $z=f(x, y)$ może być obliczona przez całkowanie według Burkilla funkcji prostokąta $G(f,R)$ wprowadzonej przez Z. Geöcze'go. Ponieważ funkcja $G(f, R)$ została określona przy pomocy całki Riemanna, obliczenie powyższe składa się z dwukrotnego przejścia do granicy.

Stwierdzam, że można zastąpić $G(f,R)$ przez funkcję $H(f,R)$ określoną przy pomocy minimum bezwzględnych wartości przyrostu funkcji $f(x,y)$ na odcinkach równoległych do osi x i y. Wynika stąd, że funkcja $f(x,y)$ jest wtedy i tylko wtedy o wahaniu skończonem w znaczeniu Tonelli'ego, jeśli $H(f,R)$ jest funkcją prostokąta o wahaniu skończonem. Podobnież funkcja $f(x,y)$ może być wtedy i tylko wtedy bezwzględnie ciągłą w znaczeniu Tonelli'ego jeśli $H(f,R)$ jest funkcją bezwzględnie ciągłą prostokąta R.

JÓZEF MARCINKIEWICZ

Kilka twierdzeń z rachunku prawdopodobieństwa.
Quelques théorèmes de la théorie des probabilités.

(Komunikat zgłoszony przez czł. A. Zygmunda na posiedzeniu w dniu 25.XI 1938 r.).

1. Cette note contient trois parties différentes. Dans la prémière je donne une solution d'un problème posé par M. P. Lévy.

Dans la seconde je démontre quelques inégalités concernant les suites des variables aléatoires indépendantes. La dérnière partie contient des applications des ces inégalités aux séries des variables aléatoires indépendantes et à la théorie des lois infiniment divisibles.

2. M. P. Lévy a démontré [1]) le

Théorème 1. *Soient x_n des variables aléatoires indépendantes telles que l'on a pour $\xi > X$*

$$(2.1)\qquad pr\left\{|x_n| > \xi\right\} \leq C\,\xi^{-\alpha};\quad pr\left\{|x_n| > \xi\right\} \geq c\,\xi^{-\alpha}\qquad (0 < \alpha < 1)$$

et soit $\lambda(t)$ une fonction croissante telle que l'oscillation de $\lg \lambda(t)$ entre t et $2t$ est inifiniment petit pour $t \to \infty$.

Alors la probabilité d'une infinité de réalisations de l'inégalité

$$(2.2)\qquad |S_\nu| > [\nu \lg \nu\, \lambda(\lg \nu)]^{1/\alpha},\ \text{où}\ S_\nu = \sum_1^\nu x_i\,,$$

est 0 si $[p\,\lambda(p)]^{-1}$ est le terme genéral d'une série convergente et 1 dans le cas contraire.

Il a aussi posé[2]) le problème de savoir si ce théorème reste vrai pour $1 \leq \alpha < 2$. Je vais démontrer qu'il en est ainsi en réalité. Je remarque que la démonstration donnée par M. P. Lévy est basée sur la théorie des lois stables; ma démonstration est tout à fait elementaire.

---

[1]) Lévy [7].

[2]) Ibid., spéc. p. 145.

Théorème 2. *Lorsque les variables x_n et la fonction $\lambda(t)$ vérifient les conditions du théorème* 1 *et la condition additionelle*

(2.3) $$E(x_n) = 0,$$

la probabilité d'une infinité de réalisations de (2.2) *est* 0 *si la série*

(2.4) $$\Sigma\, [p\, \lambda(p)]^{-1}$$

converge et 1 *dans le cas contraire.*

On voit d'abord que la condition (2.4) est équivalente à l'inégalité suivante

(2.5) $$\sum_{2}^{\infty} [n \lg n\ \lambda(\lg n)]^{-1} < \infty.$$

Désignons[1]) par $\bar{x}_n$ la variable aléatoire égale à x_n lorsque celle-ci ne surpasse pas en module $[n \lg n\ \lambda(\lg n)]^{1/\alpha}$ et à zéro dans le cas contraire. En supposant l'inégalité (2.5) on conclut d'après (2.1)

(2.6) $$\Sigma\, pr\left\{x_n \lessgtr \bar{x}_n\right\} \leq M + C \sum_{2}^{\infty} [n \lg n\ \lambda(\lg n)]^{-1} < \infty.$$

D'autre part soit $\delta_\nu = E(\bar{x}_\nu)$. On a

$$0 \leq E\left\{(\bar{x}_n - \delta_n)^2\right\} = E\left\{\bar{x}_n^2\right\} - E^2\left\{\bar{x}_n\right\} \leq E\left\{\bar{x}_n^2\right\} =$$
$$= O\left\{[n \lg n\ \lambda(\lg n)]^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\right\},$$

ou bien

(2.7) $$\Sigma\, E\left\{(\bar{x}_n - \delta_n)^2 [n \lg n\ \lambda(\lg n)]^{-2/\alpha}\right\} = O\, \Sigma\, [n \lg n\ \lambda(\lg n)]^{-1}.$$

La dérnière série étant convergente il en résulte d'aprés un théorème connu[2]) la convergence au sens de Bernoulli de la série

(2.8) $$\Sigma\, [n \lg n\ \lambda(\lg n)]^{-1} (\bar{x}_n - \delta_n).$$

Il vient

(2.9) $$\sum_{1}^{n} (\bar{x}_\nu - \delta_\nu) = o\left\{[n \lg n\ \lambda(\lg n)]^{1/\alpha}\right\}.$$

D'autre part on a $\delta_\nu = E(x_n - \bar{x}_n) = O\left\{[n \lg n\ \lambda(\lg n)]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right\}$ lorsque $\alpha > 1$ et $\delta_\nu = o(1)$ lorsque $\alpha = 1$ d'après (2.3).

Dans tous les cas on obtient

$$\sum_{1}^{n} \delta_\nu = o\left\{[n \lg n\ \lambda(\lg n)]^{1/\alpha}\right\}$$

---

[1]) La méthode de la démonstration est la même que dans Marcinkiewicz et Zygmund [5].

[2]) Khintchine et Kolmogoroff [4].

ce qui montre d'après (2.9) et (2.6) que la suite

$$\left\{[n \lg n\, \lambda(\lg n)]^{-1/\alpha} \sum_{1}^{n} x_\nu\right\}$$

converge vers zéro au sens de Bernoulli. En supposant que la série (2.4) diverge on conclut facilement de (2.1) que

$$pr\left\{|x_n| > [n \lg n\, \lambda(\lg n)]^{1/\alpha}\right\} \geq c\, [n \lg n\, \lambda(\lg n)]^{-1},$$

ou bien que

$$\Sigma\, pr\left\{|x_n| > [n \lg n\, \lambda(\lg n)]^{1/\alpha}\right\} = \infty.$$

Il en résulte que la probabilité d'une infinité de réalisations de

$$|S_n| > [n \lg n\, \lambda(\lg n)]^{1/\alpha}$$

est 1.

On voit que le théorème 1 peut être aussi démontré par la même méthode.

3. Théorème 3. *Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des variables aléatoires indépendantes. On peut définir les constantes $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ de manière que l'on ait*

(3.1) $$\sum_{1}^{n} \delta_i = 0,$$

(3.2) $$pr\,(S^* \geq x) \leq 2\, pr\,(S \geq x),$$

ou $$S = \sum_{1}^{n} x_i, \quad S^* = \max_{1 \leq \nu \leq n-1} \sum^{\nu} (x_i - \delta_i).$$

Je choisis pour δ_n le nombre satisfaisant aux inégalités suivantes

(3.3) $$pr\left\{x_n - \delta_n \geq 0\right\} \geq \tfrac{1}{2}, \quad pr\left\{x_n - \delta_n \leq 0\right\} \geq {}^1/_2.$$

En supposant $\delta_n, \delta_{n-1}, \ldots \delta_{n-i}$ définis je prend pour δ_{n-i-1} un nombre satisfaisant aux inégalités

(3.4) $$pr\left\{[\sum_{\nu=i+1}^{0} (x_{n-\nu} - \delta_{n-\nu})] \geq 0\right\} \geq {}^1/_2, \quad pr\left\{[\sum_{\nu=i+1}^{0} (x_{n-\nu} - \delta_{n-\nu})] \leq 0\right\} \geq {}^1/_2.$$

Enfin je pose

(3.5) $$\delta_1 = -\sum_{2}^{n} \delta_\nu$$

et $$S_\nu = \sum_{1}^{\nu} (x_i - \delta_i), \quad R_\nu = \sum_{\nu+1}^{n} (x_i - \delta_i), \quad R_n = 0.$$

On a d'une façon évidente d'après (3.4) et (3.5)

(3.6) $$\sum_{1}^{n} \delta_\nu = 0$$

(3.7) $$pr\,(R_\nu \geq 0) \geq {}^1/_2; \quad pr\,(R_\nu \leq 0) \geq {}^1/_2.$$

Soit A_i l'événement défini par les inégalités

(3.8) $$S_1 < x,\ S_2 < x, \ldots,\ S_{i-1} < x,\ S_i \geq x,$$

et soit A l'événement

(3.9) $$\max_{1 \leq \nu \leq n} S_\nu \geq x.$$

Il est évident que l'on a

$$A = \Sigma A_i .$$

Les événements A_i étant disjoints il en résulte

(3.10) $$pr\ A = \sum_1^n pr \left\{ A_i \right\}.$$

Soit B_i l'événement défini par l'inégalité

(3.11) $$R_i \geq 0.$$

Il est évident que A_i et B_i sont indépendants, ce qui donne

(3.12) $$pr \left\{ A_i B_i \right\} = pr \left\{ A_i \right\} pr \left\{ B_i \right\}.$$

D'autre part lorsque l'événement $A_i B_i$ se produit on a aussi $S \geq x$. Les événements $A_i B_i$ étant disjoints on a

(3.13) $$pr \left\{ S \geq x \right\} \geq \sum_1^n pr \left\{ A_i B_i \right\}.$$

Il en résulte d'après (3.12) et (3.7)

$$pr \left\{ S \geq x \right\} \geq \tfrac{1}{2}\, \Sigma\ pr \left\{ A_i \right\} = \tfrac{1}{2}\, pr\ (S^* \geq x),$$

ou bien

$$pr\ (S^* \geq x) \leq 2\ pr\ (S \geq x),$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Ce théorème donne le

Théorème 4. *Soient x_n des variables aléatoires indépendantes symétriques, c'est à dire vérifiant les inégalités*

(3.14) $$pr\ (x_\nu \geq x) = pr\ (x_\nu \leq -x) \qquad (x \geq 0,\ \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

En posant

(3.15) $$S = \sum_1^n x_\nu, \quad S^* = \max_{1 \leq \nu \leq n} \sum_1^\nu x_i,$$

on a

(3.16) $$pr\ (S^* \geq x) \leq 2\ pr\ (S \geq x).$$

4. Etant donnée une somme

$$S = \sum_1^n x_\nu$$

de variables aléatoires indépendantes la question s'impose de savoir quelle est l'ordre de grandeur des termes x_ν. On a à ce sujet le

Théorème 5 *Les variables aléatoires x_n étant indépendantes on a*

(4.1) $$pr\left\{\max_{1\leq\nu\leq n}\bar{x}_\nu \geq 2x\right\} \leq 2\,pr\left\{S\geq x\right\}/\left[1-2\,pr\left\{|S|\geq x\right\}\right]$$

où $\bar{x}_\nu = x_\nu - \delta_\nu$ *et* δ_ν *sont les mêmes que dans le théorème* 3.

Désignons par A_i, B_i, C_i les événements définis réspectivement par les inégalités

(4.2) $$\left|S_{i-1}\right| = \left|\sum_1^{i-1}\bar{x}_\nu\right| < x; \quad \bar{x}_i \geq 2x; \quad R_i = \sum_{i+1}^{n}\bar{x}_\nu \geq 0.$$

On a

(4.3) $$pr\left\{\max_{1\leq\nu\leq n}\bar{x}_\nu \geq 2x\right\} \leq \sum_1^n pr\left\{B_i\right\}.$$

D'autre part les événements A_i, B_i, C_i étant indépendants on a

(4.4) $$pr\left\{A_i\,B_i\,C_i\right\} = pr\left\{A_i\right\}pr\left\{B_i\right\}pr\left\{C_i\right\}.$$

D'après (4.2) on conclut facilement que lorsqu'on a $A_i B_i C_i$ on a aussi $S\geq x$, ce qui donne

(4.5) $$pr\,(S\geq x) \geq \sum_1^n pr\,(A_i\,B_i\,C_i),$$

ou bien d'après (4.4) et la définition des nombres δ_i

(4.6) $$pr\,(S\geq x) \geq \sum_1^n pr\,(A_i)\,pr\,(B_i)\,pr\,(C_i) \geq \frac{1}{2}\sum_1^n pr\,(A_i)\,pr\,(B_i).$$

La formule (3.2) donne

$$pr\left\{|S_{i-1}|\geq x\right\} \leq 2\,pr\,(|S|\geq x),$$

d'où on tire

$$pr\,(A_i) = pr\,(|S_{i-1}| < x) \geq 1-2\,pr\,(|S|\geq x).$$

La dérnière inégalité portée dans (4.6) donne

$$pr\,(S\geq x) \geq \frac{1}{2}\sum\left[1-2\,pr\,(|S|\geq x)\right]pr\,B_i.$$

On en obtient, en supposant que $1-2\,pr\,(|S|\geq x) > 0$,

$$pr\,(\max_{1\leq\nu\leq n}\bar{x}_\nu \geq 2x) \leq \sum pr\,(B_i) \leq 2\,pr\,(S\geq x)/\left[1-2\,pr\,(|S|\geq x)\right].$$

5. On peut donner au théorème 4 une autre forme plus commode dans les applications. Pour ce but je vais établir le

Lemme 1. *Soient $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que η_i admet la valeur 1 avec la probabilité δ_i et la valeur 0 avec la probabilite $1-\delta_i$.*

Alors l'inégalité

(5.1) $$pr\ (\Sigma\ \eta_i = 0) \geq 1 - \varepsilon \qquad (\varepsilon \leq {}^1/_2)$$

entraîne

(5.2) $$\Sigma\ pr\ (\eta_i = 1) = \Sigma\ \delta_i \leq 2\,\varepsilon\,.$$

En effet, soit A_i l'événement défini par l'égalité $\eta_i = 1$ et B_i l'événement contraire. On a d'une façon évidente

$$pr\ (\Sigma\ \eta_i = 0) = pr\ (\prod_1^n B_i)\,.$$

Les événements étant indépendants il en résulte

$$pr\ (\Sigma\ \eta_i = 0) = \prod_1^n pr\ B_i = \prod_1^n [\,1 - pr\ (A_i)\,] = \prod_1^n (1 - \delta_i)\,.$$

On en conclut en tenant compte de (5.1)

$$1 - \varepsilon \leq \prod_1^n (1 - \delta_i)\,,$$

(5.3) $$\lg\ (1 - \varepsilon) \leq \sum_1^n \lg\ (1 - \delta_i) \leq - \sum_1^n \delta_i\,,$$

car

$$\lg\ (1 - \delta_i) = - \delta_i - \frac{\delta_i^2}{2} - \ldots \leq - \delta_i\,.$$

La formule (5.3) donne alors

$$\sum_1^n \delta_i \leq - \lg (1 - \varepsilon) \leq 2\,\varepsilon\,,$$

ce qui est bien la formule (5.2).

Théorème 6. *Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des variables aléatoires indépendantes et $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ définis comme dans le théorème 3.*

L'inégalité

(5.4) $$pr\ (|S| \geq x) < {}^1/_8$$

entraîne

(5.5) $$\Sigma\ pr\ (x_i - \delta_i \geq 2\,x) \leq 6\ pr\ (S \geq x)\,.$$

Soit A_i l'événement défini par l'inégalité $x_i - \delta_i \geq 2\,x$ et B_i l'événement contraire. Les inégalités (5.4) et (4.1) donnent

(5.6) $$pr\ (\max\ \bar{x}_i \geq 2\,x) \leq \tfrac{8}{3}\ pr\ (S \geq x) \qquad (\bar{x}_i = x_i - \delta_i\,).$$

Une application facile du lemme 1 donne

(5.7) $$\sum_1^n pr\ (\bar{x}_i \geq 2\,x) \leq 2\,pr\,(\max_i\ \bar{x}_i \geq 2\,x)\,.$$

On tire de (5.6) et (5.7)

$$\Sigma\ pr\ (\bar{x}_i \geq 2\,x) \leq 6\ pr\ (S \geq x)\,.$$

6. On peut donner à ce théorème encore une autre forme. Dans les raisonnements précédents $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ sont des fonctions de toutes les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ce qui exige que le nombre des variables x_i soit fini et rend à la fois très difficile le calcul des nombres δ_i. On peut éviter ces deux difficultés comme il suit.

Soit m_i la *médiane* de la variable x_i c'est à dire un nombre défini par les inégalités

$$pr\,(x_i - m_i \geq 0) \geq 1/2, \quad pr\,(x_i - m_i \leq 0) \geq 1/2.$$

On tire de (5.4) lorsque $pr\,(|S| > x) < 1/24$

$$pr\,(x_i - \delta_i \geq 2x) \leq 1/4; \quad pr\,(x_i - \delta_i \leq -2x) \leq 1/4,$$

ce qui montre que

$$-2x + \delta_i \leq m_i \leq 2x + \delta_i.$$

La dérnière inégalité donne

$$pr\,(|x_i - m_i| \geq 4x) \leq pr\,(|x_i - \delta_i| \geq 2x)$$

et l'on obtient du théorème 6 le

Théorème 7. *Soient $x_1, x_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et $m_1, m_2, \ldots$ leurs médianes.*

L'inégalité

$$pr\,(|S| \geq x) \leq 1/24$$

entraîne

(6.1) $$\Sigma\, pr\,(|x_i - m_i| > 4x) \leq A\, pr\,(|S| \geq x) \quad (A = const).$$

7. Maintenant je vais démontrer quelques conséquences des inégalités démontrées.

Théorème 8. *Soit*

(7.1) $$\Sigma\, x_i$$

une série de variables aléatoires indépendantes. Lorsqu'elle converge en probabilité elle converge aussi au sens de Bernoulli.

Ce théorème est connu. Il a été découvert par M. P. Lévy[1]).

D'après l'hypothèse il existe une suite n_i telle que

(7.2) $$pr\,\Big(\Big|\sum_{n_i+1}^{n_{i+1}} x_\nu\Big| \geq 2^{-i}\Big) \leq 2^{-i-1}.$$

Or, d'aprés le théorème 3 il existe des constantes δ_i telles que

$$pr\,(S_i^* \geq 2^{-i}) \leq 2^{-i},$$

où

$$S_\nu^* = \max_{n_\nu < s \leq n_{\nu+1}} \sum_{n_\nu+1}^{s} (x_j - \delta_j).$$

---

[1]) Lévy [8]; cf. aussi Marcinkiewicz et Zygmund [6].

Il en résulte d'après (7.2) qu'on peut définir les nombres δ_i de manière que la série

$$\Sigma\ (x_i - \delta_i)$$

soit convergente au sens de Bernoulli. La série (7.1) étant convergente en probabilité il en résulte la convergence de la série

$$\Sigma\ \delta_i$$

ce qui montre aussi la convergence au sens de Bernoulli de la série (7.1).

8. **Théoréme 9** [1]). *Soient x_i des variables aléatoires indépendantes à valeurs moyennes nulles. On a*

$$E\,(S^{*p}) \leq A_p\, E\,(|S|^p) \qquad (p \geq 1)$$

où $\quad S = \Sigma\, x_i\,, \qquad S^* = \text{borne sup.}_{\nu}\, |\sum_{1}^{\nu} x_i\,|, \qquad A_p = const.$

et $E(x)$ désigne l'ésperance mathématique de la variable x.

Ce théorème est connu. Sa démonstration a été basée sur un théorème de M. M. Hardy et Littlewood. La démonstration que je vais donner maintenant est tout à fait élémentaire.

D'après le théorème 4 la proposition est vraie lorsque les variables sont symétriques. On a dans ce cas

$$E\,(S^{*p}) \leq 2E\,(|S|^p).$$

D'autre par il est évident qu'il suffit de démontrer ce théorème pour un nombre fini de variables. On peut aussi supposer que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n'admettent qu'un nombre fini de valeurs différentes. Désignons par $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ les variables aléatoires indépendantes telles que x'_i soit équivalente à $-x_i$. Les variables $\eta_i = x_i + x'_i$ sont indépendantes et symétriques. En posant

$$H^* = \max\, |\sum_{1}^{\nu} \eta_i\,|, \quad H = \sum_{1}^{n} \eta_i\,,$$

on a l'inégalité suivante

(8.1) $$E\,(H^{*p}) \leq 2E\,(|H|^p).$$

Soient [2]) $a_1, a_2, \ldots, a_r$ les valeurs prises par les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$.

Désignons par $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ et $j = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ les systèmes de nombres entiers contenus entre 1 et r. Soient (i, j) les systèmes doubles de tels nombres et soit $N(i, j)$ une fonction de (i, j) n'admettant que les valeurs 1, 2, 3, ..., n.

---

1) Marcinkiewicz et Zygmund [6].

2) Comparer Marcinkiewicz et Zygmund [6].

Posons

$$G(N) = \sum_{1}^{N(i,j)} \eta_i \text{ lorsque } x_1 = a_{i_1}, \ldots, x_n = a_{i_n}, x'_1 = a_{j_1}, \ldots, x'_n = a_{j_n}$$

où $i = (i_1, \ldots, i_n)$, $j = (j_1, \ldots, j_n)$. D'après (8.1) on a

$$E(|G(N)|^p) \leq 2 E(|\sum_{1}^{n} \eta_i|^p) \tag{8.2}$$

Or, il est possible de trouver une fonction $N(i,j) = N(i)$ constante par rapport au système j et telle que l'on ait

$$|\sum_{1}^{N(i)} a_{i_\nu}| = \max |\sum_{1}^{\nu} a_{i_s}|; \quad i = (i_1, i_2, \ldots, i_n).$$

On a alors en désignant par $E(i, A)$ l'ésperance mathématique d'un événement A sous les conditions que $x_1 = a_{i_1}$, $x_2 = a_{i_2}$, $\ldots$, $x_n = a_{i_n}$

$$E^{1/p}\left\{i, H^{*p}\right\} \geq E^{1/p}\left\{i, S^{*p}\right\} - E^{1/p}\left(i, \left|\sum_{1}^{n(i)} \eta_\nu\right|^p\right),$$

ou bien

$$E\left\{i, S^{*p}\right\} \leq 2^p E\left(i, H^{*p}\right) + E\left(i, \left|\sum_{1}^{n(i)} \eta_\nu\right|^p\right).$$

En ajoutant ces formules pour tout i on obtient

$$E(S^{*p}) \leq 2^p E(H^{*p}) + \sum_{i} E(i, |\sum_{1}^{N(i)} x_\nu|^p)$$

et on voit d'après (8.1) que tout revient à démontrer le

Lemme 2. *Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs moyennes nulles. Alors on a pour tout $\nu \leq n$*

$$E(|\sum_{1}^{\nu} x_i|^p) \leq A_p E(|\sum_{1}^{n} x_i|^p) \qquad (p \geq 1) \tag{8.3}$$

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 4 lorsque les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont symétriques. Pour le démontrer dans le cas général je désigne par $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ les variables aléatoires indépendantes telles que x_i est équivalente à $-x'_i$.

On a d'après la rémarque faite

$$E\left(|\sum_{1}^{\nu} (x_i + x'_i)|^p\right) \leq 2 E\left(|\sum_{1}^{n} (x_i + x'_i)|^p\right).$$

Pour en tirer la proposition demandée il suffit de démontrer l'inégalite double

$$A_p E(|\xi|^p) \leq E(|\xi + \xi'|^p) \leq B_p E(|\xi|^p),$$

où ξ' est équivalente à $-\xi$ et $E(\xi) = 0$.

La deuxième partie de cette inégalité résulte immédiatement de l'inégalité de Hölder. Soit $0 < \Delta < 1$ et

(8.4) $$E(|\xi|^p) = 1$$

On a ou bien

(8.5) $$E(|\xi|) \leq \Delta,$$

ou bien

(8.6) $$E(|\xi|) \geq \Delta.$$

En désignant par A, B, E les événements définis respectivement par les inégalités

$$\xi \leq 0, \quad \xi > 0, \quad |\xi| \leq 1$$

et en désignant par A' et B' les événements correspondants pour la variable ξ' on trouve dans le cas (8.5)

$$E(|\xi_E|^p) \leq E(|\xi_E|) \leq \Delta,$$

où ξ_E est égale à ξ dans le cas E et à 0 dans le cas contraire.

L'inégalité de Minkowski donne

(8.7) $$E^{1/p}(|(\xi+\xi')_E|^p) \geq E^{1/p}(|\xi_E|^p) - E^{1/p}(|\xi'_E|^p) \geq$$
$$\geq \{pr(E)\, E(|\xi'|^p)\}^{1/p} - \Delta^{1/p} \geq (1-\Delta)^{1/p} - \Delta^{1/p}.$$

En supposant l'inégalité (8.6) vérifiée on a

$$E(|\xi_A|) = E(|\xi_B|) \geq \Delta/2,$$

et à plus forte raison

(8.8) $$E(|\xi_A|^p) \geq (\Delta/2)^p; \quad E(|\xi_B|^p) \geq (\Delta/2)^p.$$

Soit $pr(A) \geq 1/2$. On a

(8.9) $$E(|\xi+\xi'|^p) \geq E(|(\xi+\xi')_{AA'}|^p) \geq E(|\xi'_{AA'}|^p) =$$
$$= pr(A)\, E(|\xi'_{A'}|^p) \geq 1/2\, (\Delta/2)^p.$$

En posant $\Delta = 1/4$ on tire de (8.7) et (8.9)

$$E(|\xi+\xi'|^p) \geq \min\left[(1/8)^p/2,\ (3^{1/p}-1)^p/4\right],$$

ce qui est l'inégalité demandée.

9. Théorème 10. *Soient $x_{n,\nu}$ $(n, \nu = 1, 2, \ldots.)$ des variables aléatoires indépendantes satisfaisant à la condition suivante:*

(9.1) $$\max_{\nu}\, pr(|x_{n,\nu}| > \varepsilon) \to 0 \qquad (\varepsilon > 0)$$

Alors pour que la loi V_n dont dépend la variable aléatoire

$$\sum_{\nu} x_{n,\nu}$$

tende vers une loi V il faut et il suffit que l'on puisse définir des constantes $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ de manière que l'on ait

(9.2) $$\sum_\nu pr\,(|x_{n,\nu}| \geq K_n) \to 0$$

et que l'on ait en posant

(9.3) $$x'_{n,\nu} = x_{n,\nu} \text{ si } |x_{n,\nu}| \leq K_n \text{ et } x'_{n,\nu} = 0 \text{ si } |x_{n,\nu}| > K_n$$

(9.4) $$\varphi''_{n,\nu}(t) = E\left\{e^{it(x_{n,\nu} - \lambda_{n,\nu})}\right\},\ \lambda_{n,\nu} = E\,(x'_{n,\nu}),$$

les relations suivantes:

(9.5) $$\max_\nu |\lambda_{n,\nu}| \to 0,\ i\sum_\nu \lambda_{n,\nu} + \sum_\nu (\varphi''_{n,\nu} - 1) \to \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\,dV(x),$$

et cela uniformément dans tout intervalle fini de la variable t.

Soit $V_n \to V$ [1]).

Soit $m_{n,\nu}$ la médiane de la variable $x_{n,\nu}$. D'après (9.1) on a $\max_\nu |m_{n,\nu}| \to 0$. Il en résulte d'après le théorème 7

(9.6) $$\sum_\nu pr\,(|x_{n,\nu}| > K) \leq \omega(K),$$

où la fonction $\omega(K)$ est indépendante de n et $\omega(K) \to 0$ pour $K \to \infty$. K étant fixé, soit

(9.7) $$x'_{n,\nu} = \begin{cases} x_{n,\nu} & si\ |x_{n,\nu}| \leq K, \\ 0 & si\ |x_{n,\nu}| > K. \end{cases}$$

En désignant par V'_n la loi de la somme $\sum x'_{n,\nu}$ on obtient de (9.6)

(9.8) $$|V_n - V'_n| \leq \omega(K).$$

On en conclut facilement dès que K est suffisamment grand

(9.9) $$\sum_\nu E\,(x'_{n,\nu}) = O(1),\ \max_\nu E\,(x'_{n,\nu}) = o(1),$$

(9.10) $$\sum_\nu E\,(x''^2_{n,\nu}) = O(1),\ x''_{n,\nu} = x'_{n,\nu} - E\,(x'_{n,\nu}).$$

Soient

(9.11) $$\varphi''_{n,\nu}(t) = E\,(e^{it\,x''_{n,\nu}});\ b_{n,\nu} = E\,(x''^2_{n,\nu});\ \lambda_{n,\nu} = E\,(x'_{n,\nu}),$$

(9.12) $$\varphi'_n(t) = E\,(e^{it\sum x'_{n,\nu}}).$$

On a d'après (9.6) et (9.7)

$$\lg \varphi''_{n,\nu} = (\varphi''_{n,\nu} - 1) + o\,(b_{n,\nu}).$$

---

[1]) Un théorème analogue a été énoncé sans démonstration par M. Gnedenko. Voir Gnedenko [2]. Comparer aussi Bawly [1].

Il en résulte

(9.13) $$\lg \varphi'_n(t) = i \sum_\nu \lambda_{n,\nu} + \sum_\nu (\varphi''_{n,\nu} - 1)$$

et cela uniformément dans tout intervalle fini de t.

L'égalité (9.13) étant vérifiée pour tout K fini, il est possible de trouver une suite $K_n \to \infty$ de sorte qu'elle soit encore vérifiée lorsqu'on pose dans la définition (9.7) K_n au lieu de K. La formule (9.6) démontre d'après (9.13) que les conditions énoncées sont nécessaires.

En supposant au contraire les relations (9.2), (9.3), (9.4), (9.5) satisfaites on conclut d'abord en posant dans (9.5) $t = 0$.

(9.14) $$\sum \lambda_{n,\nu} \to \lambda .$$

Il en résulte la convergence de la somme

(9.15) $$\sum_\nu (\varphi''_{n,\nu} - 1).$$

En particulier on en tire la convergence de la loi dont dépend la somme

(9.16) $$\sum_\nu \xi_{n,\nu} ,$$

où $\xi_{n,\nu}$ sont des variables aléatoires indépendantes telles que

(9.17) $$\lg E\,(e^{it\,\xi_{n,\nu}}) = \varphi''_{n,\nu} - 1 .$$

Il en résulte d'aprés (9.1), (9.13) et le théorème 7

(9.18) $$\sum_\nu pr\,(|\xi_{n,\nu}| > K) \leq \omega'(K) ,$$

où ω' est indépendante de n et $\omega'(K) \to 0$ pour $K \to \infty$.

On en conclut facilement que

(9.19) $$\sum_\nu pr\,(|x'_{n,\nu}| > K) \leq \omega''(K) ,$$

où $\omega''(K)$ vérifie les mêmes conditions que $\omega'(K)$.

En utilisant ce résultat et en opérant comme dans la démonstration de la nécessité des conditions on démontre leur suffisance.

Comme conséquence de ce théorème on a le

Théorème 11[1]). *Soient $x_{n,\nu}$ des variables aléatoires indépendantes vérifiant la condition* (9.1). *La loi limite de la somme*

$$\sum_\nu x_{n,\nu}$$

est infiniment divisible.

---

[1]) Khintchin [3].

TRAVAUX CITÉS.

[1]. G. M. Bawly. *Über einige Verallgemeinerungen der Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Recueil Math. 1 (43) (1936) p. 917—930.

[2]. B. Gnedenko. *Über die Konvergenz der Verteilungsgesetze von Summen voneinander unabhängiger Summanden.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de L'U. R. S. S. Vol. 18 (1938) p. 231—234.

[3]. A. Khintchin. *Zur Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze.* Recueil Math. 2 (44) (1937) p. 79—119.

[4]. A. Khintchin et A. Kolmogoroff. *Über Konvergenz von Reihen deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden.* Recueil Math. 32 (1925) p. 668—677.

[5]. J. Marcinkiewicz et A. Zygmund. *Sur les fonctions indépendantes.* Fund. Math. 29 (1937) p. 60—90.

[6]. J. Marcinkiewicz et A. Zygmund. *Quelques théorèmes sur les fonctions indépendantes.* Stud. Math. 7 (1938) p. 104—120.

[7]. P. Lévy. *Sur les séries dont les termes sont les variables éventuelles indépendantes.* Stud. Math. 3 (1931) p. 117—155.

[8]. P. Lévy. *Variables aléatoires.* Paris 1937.

Streszczenie.

Praca niniejsza składa się z trzech części. W pierwszej z nich rozwiązuję pewne zagadnienie postawione przez P. Lévy'ego. Druga część zawiera pewne nierówności, dotyczące szeregów zmiennych ewentualnych. Ostatnia część zawiera zastosowania rezultatów, otrzymanych w części drugiej, do teorji szeregów zmiennych ewentualnych i do teorji praw nieskończenie podzielnych.

JÓZEF MARCINKIEWICZ i ANTONI ZYGMUND.

O drugiej pochodnej uogólnionej.
Sur la dérivée seconde généralisée.

(Komunikat zgłoszony na posiedzeniu w dniu 25.XI.1938 r.).

1. On dit qu'une fonction $f(x)$ possède au point x_0 une dérivée seconde généralisée au sens de M. de la Vallée Poussin et que cette dérivée est égale à b, s'il existe un autre nombre a tel que pour t tendant vers zéro on ait

$$f(x_0+t)=f(x_0)+at+\tfrac{1}{2}bt^2+o(t^2). \tag{1.1}$$

On dit que $f(x)$ admet au point x_0 une dérivée seconde généralisée au sens de Schwarz égale à s ($|s|<+\infty$), lorsque

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{t^2}=s. \tag{1.2}$$

Nous désignerons ces deux dérivées respectivement par $D^2VPf(x_0)$ et $D^2Sf(x_0)$. On voit facilement que si la dérivée $D^2VPf(x_0)$ existe il en est de même de $D^2Sf(x_0)$ et les deux dérivées ont la même valeur. La proposition inverse serait fausse, mais on a démontré le théorème suivant: [1])

Théorème 1. *Si la fonction mesurable $f(x)$ posséde dans un ensemble E de mesure positive la dérivée $D^2Sf(x)$, la dérivée $D^2VPf(x)$ existe presque partout dans E.*

La définition (1.2) peut être généralisée comme il suit. Soient $a<b<c$ trois nombres arbitraires. Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ admet au point x_0 une dérivée $D^2{}_{a,b,c}f(x_0)$ égale à s, lorsque

$$\lim_{t\to 0}\frac{A\,f(x_0+at)+B\,f(x_0+bt)+C\,f(x_0+ct)}{t^2}=s, \tag{1.3}$$

[1]) Voir notre note *On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series.* Fund. Math. 26 (1936) p. 1—43.

où A, B, C sont trois constantes convénablement choisies. Pour que cette définition soit une généralisation de la dérivée seconde ordinaire, les nombres A, B, C doivent satisfaire aux équations

$$(1.4)\qquad \begin{aligned} A + B + C &= 0, \\ Aa + Bb + Cc &= 0, \\ Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 &= 2. \end{aligned}$$

Ces équations déterminent les constantes A, B, C d'une manière unique. Si $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ on obtient la dérivée de Schwarz.

Il est évident que si la dérivée $D^2VPf(x_0)$ existe, il en est de même de la dérivée $D^2_{a,b,c}\, f(x_0)$ et on a $D^2VPf(x_0) = D_{a,b,c}\, f(x_0)$.

Le but de la note présente est d'établir le théorème suivant qui généralise le théorème 1, à savoir le

Théorème 2. *Supposons que la fonction mesurable $f(x)$ possède une dérivée $D^2_{a,b,c}\, f(x)$ en tout point d'un ensemble mesurable E de mesure positive. Alors la dérivée $D^2VPf(x)$ existe presque partout dans E.*

2. Nous décomposons la démonstration du théorème en une série de lemmes.

Lemme 1. *Si le théorème 2 est vrai dans le cas où $D^2_{a,b,c}\, f(x)$ est égale à zéro pour $x \in E$, il est vrai dans le cas général.*

Démonstration. La fonction f étant mesurable, la dérivée $D^2_{a,b,c}\, f(x)$ est mesurable sur E. Elle est donc continue dans un sousensemble parfait $P \subset E$. Soit $g(x)$ la fonction partout continue et égale à $D^2_{a,b,c}\, f(x)$ dans P. Soit $G(x)$ une deuxième intégrale de $g(x)$. Pour la fonction $\varphi(x) = f(x) - G(x)$ on a $D^2_{a,b,c}\, \varphi(x) = 0$ si $x \in P$.

Donc si $D^2VP\varphi(x)$ existe presque partout dans P, il en est de même de $D^2VPf(x)$ et il suffit de remarquer que la différence des mesures des ensembles E et P peut être aussi petite qu'on le veut.

Lemme 2. *Supposons que $D^2_{a,b,c}\, f(x) = 0$ pour $x \in E$, où $|E| > 0$. Il existe alors un ensemble $Q \subset E$, $|Q| > 0$,*) tel qu'on a*

$$(2.1)\qquad R(x,t) = Af(x+at) + Bf(x+bt) + Cf(x+ct) = o(t^2)$$

uniformément pour $x \in Q$ et $t \to 0$.

Nous pouvons de plus supposer que la fonction $f(x)$ est bornée dans Q.

Démonstration. Pour tout n il existe un nombre $t_n > 0$ et un ensemble $E_n \subset E$ tels que

$$\left.\begin{aligned} &(2.2)\qquad |R(x,t)| \leq n^{-1}t^2 \\ &(2.3)\qquad |E - E_n| \leq 2^{-n-1}|E| \end{aligned}\right\} \quad (\text{pour } x \in E_n,\ |t| < t_n,\ n = 1, 2, \ldots)$$

---

*) La mesure d'un ensemble Z est désignée par $|Z|$.

Posons
$$Q = \prod_{1}^{\infty} E_n .$$

Des inégalités (2.3) il résulte que $|Q| > 0$. De (2.2) on déduit que la relation (2.1) a lieu uniformément dans Q.

La seconde partie du lemme est évidente, car nous pouvons nous restreindre à un sousensemble de Q où f est bornée.

3. **Lemme 3.** *Soit Q l'ensemble du lemme 2 et soit*

(3.1) $$\beta = b - a, \quad \gamma = c - a .$$

Alors sous la condition du lemme 2 on a

(3.2) $$\lim_{t \to 0} \text{approx.} \frac{Af(x) + Bf(x + \beta t) + Cf(x + \gamma t)}{t^2} = 0$$

presque partout dans Q.

Démonstration. Il suffit de prouver la relation (3.2) en tout point de densité de l'ensemble Q. Soit x un tel point. L'ensemble des points t satisfaisant à l'équation

(3.3) $$x' + at = x ,$$

où $x' \in Q$, admet le point $t = 0$ comme point de densité.

D'après (3.3) on a

(3.4) $$Af(x' + at) + Bf(x' + bt) + Cf(x' + ct) =$$
$$= Af(x) + Bf(x + \beta t) + Cf(x + \gamma t) ,$$

d'où l'on déduit (3.2).

Ce résultat peut être amélioré de manière à obtenir le

Lemme 4. *Sous les conditions du lemme 2 la dérivée* $D^2{}_{0,\beta,\gamma} f(x)$ *existe presque partout dans Q, les nombres β et γ étant définis par les égalités* (3.1).

Démonstration. Soit Q l'ensemble défini dans le lemme 2 et x_0 un point de densité de Q. Pour simplifier l'écriture supposons que $x_0 = 0$.

L'ensemble Q admet donc le point zéro comme point de densité.

D'autre part il en est de même de l'ensemble T des nombres t pour lesquels
$$Af(0) + Bf(\beta t) + Cf(\gamma t) = o(t^2).$$

Posons $\beta' = \beta/\gamma$ et considérons un nombre h suffisamment petit. Pour fixer les idées supposons que $h > 0$. Nous allons démontrer que l'on peut trouver des nombres non négatifs x et t de sorte que l'on ait

(3.5) $$x \in Q ; \quad \beta' x \in Q ;$$
$$x + tc = h\gamma ; \quad x + tb \in T ; \quad x + at \in T .$$

Les conditions (3.5) reviennent à trouver un x satisfaisant aux conditions

(3.6) $$x \in Q, \quad \beta' x \in Q, \quad x + \frac{b}{c}(h\gamma - x) \in T, \quad x + \frac{a}{c}(h\gamma - x) \in T.$$

Chaque relation (3.6) définit un ensemble dont la densité moyenne dans un intervalle de la forme $(\frac{1}{2}h\gamma, h\gamma)$ est proche d'unité. Il en est donc de même de leur produit, ce qui montre qu'on peut trouver $x > 0$ et $t > 0$ de manière à satisfaire (3.5) pourvu que h soit suffisamment petit[1]).

D'après (3.5) et (1.4) on obtient

$$Af(x+at) + Bf(x+bt) + Cf(x+ct) = o(t^2),$$

$$Af(\beta' x + a\beta' t) + Bf(\beta' x + b\beta' t) + Cf(\beta' x + c\beta' t) = o(t^2),$$

$$Af(0) + Bf(0) + Cf(0) = 0.$$

Considérons la somme de ces relations multipliées respectivement par C, B, A. Comme

$$Af(0) + Bf(\beta' x + b\beta' t) + Cf(x + bt) = o(t^2),$$

$$Af(0) + Bf(\beta' x + a\beta' t) + Cf(x + at) = o(t^2),$$

on obtient

$$Af(0) + Bf(\beta h) + Cf(\gamma h) = o(t^2) = o(h^2),$$

ce qui démontre le lemme.

4. **Lemme 5.** *Soit Q le même ensemble que dans le lemme 2. Il existe alors un segment Δ tel que $|\Delta Q| > 0$ et que la fonction $f(x)$ est uniformément bornée dans l'intervalle Δ.*

D é m o n s t r a t i o n. Pour le démontrer il suffit de choisir un segment Δ dans lequel la densité de l'ensemble Q serait très proche de l'unité. Sous ces conditions pour tout point x de Δ on peut trouver un point x_0 et un nombre t de manière que l'on ait

$$x_0 + ct = x, \quad x_0 \in Q, \quad x_0 + at \in Q, \quad x_0 + bt \in Q.$$

On a donc

$$|Af(x_0+at) + Bf(x_0+bt) + Cf(x_0+ct)| \leq M$$

$$|f(x_0+at)| \leq M, \quad |f(x_0+bt)| \leq M.$$

On en deduit que

$$|f(x_0+ct)| = |f(x)| \leq \frac{|A| + |B|}{|C|} M.$$

5. **Lemme 6.** *Sous les conditions du théorème 2 la dérivée $f'(x)$ existe presque partout dans E.*

---

[1]) Pour un raisonnement analogue cf. notre travail cité plus haut, p. 12.

Démonstration. Soit x_0 un point de densité de l'ensemble Q défini dans le lemme 2. Nous pouvons supposer que $x_0 \in \Delta$, où Δ est défini dans le lemme 5. On a donc $|f(x)| \leq M$ pour $x \in \Delta$.

Supposons que $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$.

En posant $\theta = \beta/\gamma$ on a pour $|h| < h_\varepsilon$

(5.1) $$|Cf(h) + Bf(\theta h)| \leq \varepsilon h^2$$

(5.2) $$|Cf(\theta h) + Bf(\theta^2 h)| \leq \varepsilon h^2 \theta^2$$

(5.3) $$|Cf(\theta^2 h) + Bf(\theta^3 h)| \leq \varepsilon h^2 \theta^4$$

$$|Cf(\theta^3 h) + Bf(\theta^4 h)| \leq \varepsilon h^2 \theta^6$$

....

(5.4) $$|Cf(\theta^n h) + Bf(\theta^{n+1} h)| \leq \varepsilon h^2 \theta^{2n}.$$

En multipliant les inégalités (5.1)—(5.4) réspectivement par 1, $-B/C$, B^2/C^2, ... $(-1)^n B^n/C^n$, et en ajoutant on obtient

$$|Cf(h) + B\theta^{-n} f(\theta^{n+1} h)| \leq \varepsilon M_1 h^2$$

(en tenant compte de l'égalité $B\theta/C = -1$). On voit donc que

(5.5) $$|f(h) - \theta^{-n-1} f(\theta^{n+1} h)| \leq \varepsilon M_1 h^2$$

d'où $$|\theta^{-n-1} f(\theta^{n+1} h)| \leq M_2.$$

La dernière inégalité étant valable pour tout $|h| < h_\varepsilon$ elle donne

$$f(x+t) = f(x) + O(t).$$

Pour en tirer le résultat demandé il suffit de s'appuyer sur la proposition suivante due à M. A. Denjoy.

Lemme 7. *Soit $f(x)$ une fonction mesurable et satisfaisant dans un ensemble E de mesure positive à la condition*

$$f(x+t) = f(x) + O(t).$$

Alors la dérivée $f'(x)$ existe presque partout dans E.

6. Pour compléter la démonstration du théorème 2 supposons (ce que nous pouvons faire d'après le lemme 6) que $f'(x)$ existe partout dans Q.

En posant $n = \infty$ dans (5.5) on obtient

$$|f(h) - hf'(0)| \leq \varepsilon M_2 h^2,$$

ou bien

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h^2),$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

7. Le théorème 2 admet la généralisation suivante.

Théorème 3. *Soit $f(x)$ une fonction mesurable satisfaisant pour tout x d'un ensemble de mesure positive à la condition suivante*

$$\lim_{t\to+0} |Af(x+at)+Bf(x+bt)+Cf(x+ct)|/t^2 \leq M(x), \tag{7.1}$$

où $a<b<c$, $M(x)$ ne dépend que de x, et A, B, C sont définis par les relations (1.4). *La derivée $D^2VPf(x)$ existe alors presque partout dans E.*

La démonstration du théorème 2 montre que sous les conditions du théorème 3 on a

$$f(x+h) = f(x)+f'(x)h+O(h^2) \tag{7.2}$$

presque partout dans E. Pour en tirer le résultat demandé il suffit de s'appuyer sur le

Lemme 8. *Si une fonction mesurable $f(x)$ satisfait dans un ensemble E de mesure positive à la relation* (7.2), *elle y admet presque partout la dérivée $D^2VPf(x)$.*

Ce lemme est connu[1]).

Streszczenie.

W pracy niniejszej dowodzimy następującego twierdzenia.

Twierdzenie. *Niech $f(x)$ będzie funkcją mierzalną, $a<b<c$ trzema dowolnemi liczbami rzeczywistemi, zaś A, B, C określone równaniami*

$$A+B+C=0,$$
$$aA+bB+cC=0,$$
$$a^2A+b^2B+c^2C=2.$$

Jeśli w zbiorze o mierze dodatniej mamy

$$\limsup_{t\to+0} |Af(x+at)+Bf(x+bt)+Cf(x+ct)|/t^2<\infty,$$

wówczas prawie wszędzie w tym zbiorze mamy dla $t\to 0$

$$f(x+t) = f(x)+a(x)t+\tfrac{1}{2}b(x)t^2+o(t^2).$$

Twierdzenie to uogólnia analogiczne twierdzenie dla pochodnej Schwarza, udowodnione przez nas wcześniej.

---

[1]) loc. cit.; comparer aussi A. Denjoy, Sur l'intégration des coefficients d'ordre supérieur. Fund. Math. 25 (1935) p. 271—326.

MIROSŁAW KRZYŻAŃSKI.

O rozszerzeniu operacji całkowej Denjoy na funkcje dwóch zmiennych.

Sur l'extension de l'opération intégrale de Denjoy aux fonctions de deux variables.

(Komunikat zgłoszony przez czł. St. Kempistego na posiedzeniu w dniu 25.XI 1939 r.)

Les problèmes et les résultats dont je vais traiter faisaient l'objet de ma thèse et de ma note publiée aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [1]).

Depuis le moment de leur publication, j'ai réussi d'y faire un perfectionnement grâce à une remarque que je dois à M. Marcinkiewicz, qui a demontré que la continuité absolue d'une fonction sur un ensemble entraine l'existence de l'accroissement défini de cette fonction sur cet ensemble. Je donne ici ma propre démonstration de ce théorème.

Ce résultat me permet de supprimer les hypothèses et les démonstrations de l'existence de l'accroissement défini dans la théorie des fonctions *ACG*.

Ceci me donne l'ocasion de developper les détails qui n'étaient publiés qu'en polonais [2]).

I. Fonctions de rectangle absolument continues sur l'ensemble.

§ 1. Dans la suite je me bornerai à la considération des fonctions continues et additives de rectangle, dont les côtés sont parallèles aux axes.

La fonction $F(R)$ de rectangle sera dite *absolument continue* (ou AC) sur l'ensemble E, si quelque soit le nombre $\varepsilon > 0$, on peut déterminer le nombre $\eta > 0$ tel que l'inégalité $\sum_i |R_i| < \eta$ entraine

$$\sum_i |F(R_i)| < \varepsilon,$$

[1]) C. R. de l'Ac. des Sc., juin 1934. p. 2048.

[2]) *O uogólnionych funkcjach bezwzględnie ciągłych dwóch zmiennych.* Annales Soc. Math. Pol., Suppl. 1935.

pour tout système fini $\{R_i\}$ de rectangles non empiétants, dont chacun contient un point de E et est contenu dans R_E, le plus petit rectangle contenant E.

Les théorèmes qui vont suivre, sont des extensions des propriétés analogues des fonctions absolument continues d'une variable réelle; les démonstrations sont les mêmes.

Théorème I. *Une fonction AC sur l'ensemble E l'est aussi sur tout sousensemble de E.*

Théorème II. *Une combinaison linéaire des fonctions AC est une fonction AC.*

Théorème III. *Une fonction AC sur un ensemble l'est aussi sur sa fermeture.*

En égard au dernier théorème, on peut toujour supposer que l'ensemble sur lequel une fonction est *AC*, est fermé.

§ 2. Nous conviendrons de dire qu'une fonction $F(R)$ admet sur l'ensemble fermé *E un accroissement défini,* si l'on peut attribuer a chaque ensemble fermé $E \subset E_0$ un nombre A_E tel que pour tout système R de rectangles qui n'empiètent pas, couvrent l'ensemble E et sont contenus dans R_E, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\eta > 0$ tel que l'inégalité $|\sum_i R_i - E|$ entraine

$$|\sum_i F(R_i) - A_E| < \varepsilon.$$

Théorème IV. *Une fonction AC sur l'ensemble fermé E admet sur cet ensemble un accroissement défini* [1]).

Démonstration. Soient $\{r_i\}$ et $\{\rho_j\}$ les deux systémes finis de rectangles, couvrant l'ensemble fermé $E \subset E_0$, tels que

$$|\sum_i r_i - E| < \eta; \quad |\sum_j \rho_j - E| < \eta \tag{1}$$

Nous allons démontrer que $\sum_i F(r_i)$ et $\sum_j F(\rho_j)$ diffèrent aussi peu que l'on veut, à condition que η soit assez petit.

---

[1]) C'est M. Marcinkiewicz qui a remarqué le premier que la continuité absolue entraine l'existence de l'accroissement défini. Cependant la démonstration qui va suivre est toute différente de celle de M. Marcinkiewicz, qui s'appuyait sur les propriétés des nombres dérivées.

Les systèmes $\{r_i\}$ et $\{\rho_f\}$ peuvent empiéter. Considérons un rectangle ρ_j du second système. Désignons par $\overline{\rho}_{ji}$ le plus petit rectangle contenant l'ensemble $E\, r_j\, \rho_j$. L'ensemble E étant fermé, $\overline{\rho}_{ji}$ contient des points de E sur le contour sur chaque côté. Le rectangle ρ_j contient un nombre fini des $\overline{\rho}_{ji}$. La partie restante de ρ_j peut être decomposée en nombre fini de rectangles ρ_{jk} ne contenant pas de points de E à l'intérieur, mais en contenant sur le contour. En effet, en prolongeant les côtés verticaux des $\overline{\rho}_{ji}$ on divise ρ_j en plusieurs bandes verticales. On extrait ensuite de chaque bande les rectangles qui ont les côtés communs[1]) avec l'un des $\overline{\rho}_{ji}$ et ne contiennent pas de points de E à l'intérieur. Ces rectangles constituent la partie du système $\{\rho_{jk}\}$. On joint aussi à ce système toute la bande ne contenant pas de points de E à l'intérieur.

Dans la partie restante de ρ_j on peut procéder de la manière analogue en se servant des segments horizontaux. Après un nombre fini de ces extractions on forme le système $\{\rho_{jk}\}$. Les rectangles ρ_{jk} ne contenant pas de points de E à l'intérieur, on a

$$\sum_{jk} |\rho_{jk}| < \eta \tag{2}$$

On décompose de même chacun des rectangles r_i en rectangles du système $\{\overline{\rho}_{ji}\}$ et un autre système de rectangles $\{r_{ik}\}$ jouissant de la même propriété, que ρ_{jk}; on a donc

$$\sum_{ik} |r_{ik}| < \eta \tag{2'}$$

Comme $F(R)$ est absolument continue sur E on peut dans (2) et (2′) choisir η de sorte que

$$\left|\sum_j F(\rho_j) - \sum_{ji} F(\overline{\rho}_{ji})\right| = \left|\sum_{jk} F(\rho_{jk})\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3'}$$

et

$$\left|\sum_i F(r_i) - \sum_{ji} F(\overline{\rho}_{ji})\right| = \left|\sum_{ik} F(r_{ik})\right| < \frac{\varepsilon}{2}; \tag{3''}$$

les inégalités (3′) et (3″) donnent

$$\left|\sum_j F(\rho_j) - \sum_i F(r_i)\right| < \varepsilon \tag{4}$$

ce que l'on a annoncé au commencement de la démonstration.

---

[1]) ou les parties de ces côtés.

Il est facile maintenant de déterminer le nombre A_E, qu'on appelle *l'accroissement de F (R) rélatif à l'ensemble E.*

A cet effet il suffit de considérer une suite descendante de systèmes $\left\{r_i^{(n)}\right\}$, couvrant E et les valeurs correspondantes des $\sum_i F(r_i^{(n)}) = A_n$.

L'inégalité (4) nous assure l'existence de la limite

$$\lim A_n = A_E .$$

Le théorème est ainsi demontré.

§ 3. L'accroissement sur la portion RE de la fonction $F(R)$ absolument continue sur l'ensemble E, est une fonction de R, qui sera appelée *l'accroissement de F (R) sur l'ensemble E*, et qu'on désignera dans la suite par $\Phi(R)$, s'il n'y a pas aucune ambiguïté à craindre.

La fonction $\Phi(R)$ est absolument continue dans le rectangle R.

La fonction

$$\Psi(R) = F(R) - \Phi(R)$$

sera appelée *l'accroissement de F(R) sur le complémentaire de E.* Cette fonction est absolument continue sur E, en vertu du th. II.

On peut représenter $\Psi(R)$ en série de valeurs de $F(R)$ sur la suite infinie de rectangles $\left\{r_i\right\}$ qui constituent un domaine $D\,(E, R)$ dont la mesure est égale à celle du complémentaire de ER de sorte que: $\sum_i |r_i| = |R - RE|$.

Pour construire un tel domaine on va suivre un procédé analogue à celui de M. Looman[1]). On divise R en un nombre fini de bandes en traçant les parallèles à l'axe des y de sorte que chaque bande contienne un point de E sur le contour et que le rapport des côtés, verticale et horizontale, soit inférieur a M. Les bandes qui ne contiennet pas à l'intérieur de points de E seront jointes au domaine $D\,(E; R)$.

Quand une bande contient à l'intérieur les points de E, on en extrait des rectangles ne contenant pas de points de E à l'intérieur, mais en contenant sur le contour, dont les côtés verticaux sont situés sur ceux de la bande et dont le côté vertical est au moins égal au côté horizontal. On joint ces rectangles au domaine $D(E; R)$.

---

[1]) H. Looman. *Sur la totalisation des nombres dérivées des fonctions continues de plusieurs variables indépendantes.* Fundamenta Math. t. 4 (1923), p. 246—285.

On reprend ensuite le même procédé pour la partie restante de R en remplacant M par $2M$, puis par $3M$ et ainsi de suite.

Ainsi s'etablit le domaine $D\ (E;\ R)$, la somme d'une infinité dénombrable de rectangles $\{r_i\}$, dont chaque rectangle a un point de E sur le contour et n'en contient pas à l'intérieur.

La mesure de $D\ (E;\ R)$, est égale à celle de complémentaire de ER.

La somme $\sum_{i=1}^{\infty} |r_i|$ est égale à $\Psi(R)$, qui vient d'être définie.

En effet, choisissons N de sorte que

$$\sum_{i=1}^{N} |r_i| > |D(E;R)| - \eta = |R - ER| - \eta \tag{5}$$

La partie restante se décompose en nombre fini de rectangles $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$, qui contiennent de points de E et couvrent ER. Il résulte de l'inégalité (5) que

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \rho_j - ER\right| < \eta;$$

la fonction F (R) étant absolument continue sur E, on a, en vertu du th. IV,

$$\left|\sum_{j=1}^{m} F(\rho_j) - \Phi(R)\right| < \varepsilon$$

à condition que η soit convenablement petit dans (5).

D'autre part

$$\sum_{i=1}^{N} F(r_i) + \sum_{j=1}^{m} F(\rho_j) = F(R)$$

donc

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} F(r_i) = F(R) - \Phi(R) = \Psi(R).$$

On a ainsi démontré le théorème suivant:

Théorème V. *Une fonction $F(R)$ absolument continue sur l'ensemble E se décompose en somme de deux fonctions* $\Phi(R)$ *et* $\Psi(R)$ dont la première, appelée *l'accroissement de $F(R)$ sur E*, est absolument continue dans le plus petit rectangle contenant E, la seconde, appelée *l'accroissement de $F(R)$ sur le complémentaire de* E, est absolument continue sur E. La fontion $\Psi(R)$ est d'ailleurs la somme de valeurs de $F\ (R)$ sur les rectangles $\{r_i\}$, constituant le domaine $D\ (E;\ R)$ dont la mesure est égale à celle de $R—ER$.

II. Dérivées des fonctions absolument continues sur l'ensemble.

§ 4. Nous admettons (avec M. Banach et M. Saks) la définition suivante des dérivées extrèmes d'une fonction de rectangle:

La *dérivée supérieure* d'une fonction $F(R)$ au point (x, y)

$$\overline{F}(x,y) = \overline{\lim_{|K| \to 0}} \frac{F(K)}{|K|}$$

K étant un carré, contenant le point (x, y); la définition de la *dérivée inférieure* $\underline{F}(x, y)$ est analogue.

Quand ces dérivées extrèmes sont égales et finies, on dit que $F(R)$ est *dérivable* au point (x, y) et sa dérivée $F'(x,y) = \overline{F}(x,y) = \underline{F}(x,y)$.

Nous allons démontrer qu'une fonction absolument continue sur un ensemble est presque partout dérivable sur cet ensemble.

Lemme I. *Le point M étant celui de la densité d'un ensemble fermé E, on peut déterminer, quelque soit le nombre η, un nombre δ tel que pour chaque carré K l'inégalité $|K| < \delta$ entraine $|D(E;K)| < \eta |K|$, $D(E;K)$ étant le domaine défini dans le chapitre I, § 3.*

C'est la conséquence immédiate de la définition du point de densité, puisque l'ensemble $E \cdot D(E;K)$ est de mesure nulle.

Lemme II (fondamendale). *La fonction $F(R)$ étant absolument continue sur l'ensemble fermé E, la dérivée de son accroissement sur le complémentaire de E existe et est nulle presque partout sur E.*

Démonstration. Soit $Q \subset E$ l'ensemble de points de densité de E, auxquels les dérivées de $F(R)$ sont différentes de zéro. Il suffit de démontrer que $|Q| = 0$.

Supposons que $|Q| \lesseqgtr 0$ et considérons les points de Q qui ont la propriété suivante: quel petit que soit δ, chacun de ces points est contenu dans un carré K tel que $|K| < \delta$, tandis que

$$|\Psi(K)| > \frac{1}{m} |K| \qquad (1)$$

Soit $Q_m \subset Q$ l'ensemble de ces points. Conviendrons d'écrire en abrégé $\Delta\,[|F|;\ D(E;R)]$ au lieu de $\sum_{i=1}^{\infty} |F(r_i)|$, $\{r_i\}$ désignant les rectangles constituant le domaine $D(E;R)$. Désignons par

E_m l'ensemble de points de densité de E qui sont inférieurs aux carrés K de mesure arbitrairement petite tels que

$$\Delta\,[|F|;\ D(E;\ K)] \geq \frac{1}{m}\,|K| \tag{2}$$

Comme

$$|\Psi(K)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |F(r)| = \Delta\,[|F|;\, D(E;\, K)],$$

l'inégalité (1) entraine (2), donc $Q_m \subset E_m$.

D'autre part: $Q = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m$, il existe donc m_0 tel que $|Q_{m_0}| \gtrless 0$, donc à fortiori $|E_{m_0}| \gtrless 0$.

Considérons la famille de carrés K tels que

$$\Delta\,[|F|;\ D(E;\ \overline{K})] \geq \frac{1}{m_0}\,|\overline{K}| \tag{3}$$

quoique $\qquad |D(E;\overline{K})| < \eta'\,|\overline{K}|,$

η' étant un nombre arbitrairement petit.

En vertu de la lemme I et de la définition de E, cette famille couvre E au sens de Vitali et on en peut extraire une suite $\{\overline{K}_j\}$ de carrés non empiétants, tels que: $\sum_{j=1}^{\infty} |\overline{K}_j| = |E_{m_0}|$.

On peut déterminer η' de sorte que

$$\eta' \sum_{j=1}^{\infty} |\overline{K}_j| = \eta'\,|E_{m_0}| = \eta\,. \tag{4}$$

Alors d'après (3)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Delta\,[|F|;\ D\,(E;\ \overline{K}_j)] \geq \frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^{\infty} |\overline{K}_j| = \frac{1}{m_0}\,|E_{m_0}|$$

quoique, en égard á (4), $\sum_{j=1}^{\infty} |D(E;\ K_j)| < \eta$,

η étant arbitrairement petit.

Or cela est en contradiction avec la cotinuité absolue de $F(R)$ sur E. Donc $|Q_{m_0}| \leq |E_{m_0}| = 0$ et $|Q| = 0$.

On déduit aussitôt de la lemme demontrée:

Théorème: *Une fonction absolument continue sur un ensemble fermé est presque partout dérivable sur cet ensemble et la derivée de la fonction est presque partout égale à celle de l'accroissement sur l'ensemble.*

III. Fonctions absolument continues généralisées de rectangle et leurs dérivées. Définition déscriptive de l'intégrale D.

§ 5. Une fonction continue $F(R)$ est dite *absolument continue généralisée* (ou ACC) dans un rectangle R_0, quand ce rectangle est la somme d'une infinité dénombrable ou d'un nombre fini d'ensembles sur lesquels $F(R)$ est absolument continue.

La définition admise est analogue à celle que M. Khintchine introduit pour les fontions d'une variable. Or il y a bien souvant avantage de se servir de la définition analogue a celle de Denjoy-Lusin. Le théorème qui va suivre nous assure de l'équivalence de ces définitions.

Theoreme I. *Pour qu'une fonction $F(R)$ soit ACG dans un rectangle R_0 il faut et il suffit que chaque ensemble fermé $E < R_0$ contienne une portion Er sur laquelle $F(R)$ soit AC.*

La démonstration ne diffère point de celle du théorème correspondant pour les fontions d'une variable[1]).

On profitera dans la suite de la notion des fonctions absolument continues généralisées pour définir l'intégrale D, analogue à celle de M. Denjoy (au sens restreint) des fonctions d'une variable.

Les deux théorèmes qui vont suivre sont des conséquences immédiates des définitions de la fontion ACG et de la fonction AC sur l'ensemble.

Théorème II. *Une fonction ACG dans un rectangle R_0 est ACG dans tout rectangle $R \subset R_0$: une fonction continue dans un rectangle R_0 et ACG dans les deux rectangles R_1 et R_2 tels que $R_0 = R_1 + R_2$, est ACG dans R_0.*

Théorème III. *Une conbinaison linéaire des fonctions ACG est une fonction ACG.*

Du théorème du chapitre II on déduit aussitôt:

Théorème IV. *Une fonction absolument continue généralisée dans un rectangle y est presque partout dérivable.*

§ 6. On sait que les fonctions d'une variable absolument continues généralisées, dont un nombre dérivé est presque partout non négatif, sont des fonctions monotones non décroissantes.

Un théorème analogue subsiste pour les fonctions ACG de rectangle.

---

[1]) Voir S. Saks. *Theorie de l'Intégrale.* Warszawa 1933, p. 164.

Lemme. *Si la fonction $F(R)$ a dans un rectangle R_0 la derivée inférieure $\underline{F}(x, y)$ presque partout non négative, si en outre $F(R)$ est absolument continue sur l'ensemble $Q \subset R_0$ de points où $\underline{F}(x, y) < 0$, $F(R)$ est monotone non négative dans R.*

Démonstration. Considérons un rectangle $R' \subset R_0$. La famille de carrés $\overline{K} \subset R'$ tels que $F(\overline{K}) \geq 0$ couvre le complémentaire de QR au sens de Vitali, on peut donc construire un système fini $\{\overline{R}_i\}$ de rectangles non impiétants, tel que

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{R}_i| \geq |R' - Q| - \eta = |R'| - \eta \qquad (1)$$

et

$$F(\overline{R}_i) \geq 0. \qquad (2)$$

La partie restante de R' se décompose en un nombre fini de rectangles $r_1, r_2, \ldots, r_m$, dont chacun contient des points de Q. En effet, s'il existe un rectangle r_k ne contenant pas de points de Q, on aurait [1]) $F(r_k) \geq 0$ et on joindrait r_k au systeme $\{\overline{R}_i\}$.

En égard à (1) on a

$$\sum_{j=1}^{m} |r_j| < \eta \qquad (3)$$

On peut dans (1) déterminer η de sorte que l'inégalité (3) entraine

$$\sum_{j=1}^{m} |F(r_j)| < \varepsilon$$

Alors

$$F(R') = \sum_{j=1}^{m} F(r_j) + \sum_{i=1}^{n} F(R_i) > -\varepsilon$$

donc, ε étant arbitrairement petit, $F(R') \geq 0$.

La lemme est ainsi demontrée.

Théorème V. *Pour qu'une fonction $F(R)$, ACG dans un rectangle R, y soit monotone non négative, il faut et il suffit que sa dérivée y soit presque partout non négative.*

La nécéssité de la condition est évidente: il nous reste de démontrer qu'elle est aussi suffisante.

Désignons par P l'ensemble de points au voisinage desquels on peut trouver de rectangles $\overline{R}$ tels, que $F(\overline{R}) < 0$. L'ensemble P est évidemment fermé. En vertu du théorème I il contient une portion Pr_0 sur laquelle $F(R)$ est absolument continue. Soit $Q \subset r_0$ l'ensemble de points auxquels la dérivée de $F(R)$ est négative ou n'existe pas. L'ensemble Q est de mesure nulle et $F(R)$ est AC

---

[1]) Voir S. Saks. *Th. Int.* Chap. VIII § 2. T. 1. p. 827.

sur Q, car Q est contenu dans $P \cdot r_0$. En vertu de la lemme qui vient d'être démontrée, $F(R)$ est monotone non négative dans r_0. Or c'est en contradiction avec la définition de l'ensemble P. Donc P est un ensemble vide et $F(R)$ est non negative dans R. Le théorème est démontré.

On démontre de même le théorème analogue pour les fonctions dont les dérivées sont presque partout non positives.

Corollaire I. *Une fonction ACG, dont la dérivée est nulle presque partout, est identiquement nulle.*

Corollaire II. *Une fonction ACG et à variation bornée dans un rectangle y est absolument continue.*

Corollaire III. *Une fonction ACG, dont la dérivée est presque partout non négative, est absolument continue.*

§ 7. Une fonction $f(x, y)$ de deux variables est dite *intégrable D* dans un rectangle R, quand elle y est presque partout la dérivée d'une fonction $F(R)$, ACG dans R.

La fonction $F(R)$ est alors l'intégrale indéfinie D de $f(x, y)$ dans R. D'après le théorème V l'intégrale indéfinie D est complétement déterminée par les valeurs de $f(x, y)$ sur la pleine épaisseur de R. Le nombre $F(R_0)$ s'apelle l'intégrale définie D de $f(x, y)$ sur R; on l'écrit

$$F(R_0) = D \iint_{R_0} f(x, y)\, dxdy$$

On déduit des théorêmes II et III l'additivité de l'intégrale D et l'intégrabilité de la combinaison linéaire des fonctions intégrables D.

Il est évident qu'une fonction sommable est intégrable D. D'autre part il résulte du théorème V du § 6 qu'une fonction intégrable D et non négative est sommable.

§ 8. M. Looman a effectué la totalisation de la dérivée au sens fort[1]) (supposée partout finie dans un rectangle). Or nous allons voir que la primitive de Looman est une fonction ACG et par suite, qu'elle est l'intégrale D de sa dérivée.

M. Looman a donné la définition suivante des dérivées extrêmes:

La *dérivée supérieure*:

$$\bar{D} F(x, y) = \overline{\lim} \frac{F(R)}{|R|},$$

R étant un rectangle contenant le point (x, y), dont les dimensions tendent vers zéro (d'ailleurs d'une façon arbitraire); la définition de la dérivée inférieure est analogue.

---

[8]) H. Looman. Le travail cité au § 3.

Théorème VI. Si *les dérivées fortes* $\bar{D}F(x, y)$ *et* $\underline{D}F(x, y)$ *d'une fonction continue sont finies dans un rectangle* R, *la fonction* $F(R)$ *y est ACG.*

Démonstration. Soit $E_n \subset R_0$ l'ensemble de points tels que pour les rectangles $R \subset R_0$, contenant des points de E et dont les côtés sont inférieurs à $\frac{1}{n}$, on a

$$\frac{F(R)}{|R|} < n. \tag{5}$$

Après avoir fixé un nombre n, divisons le rectangle R_0 en m_n rectangles dont les côtés ne surpassent pas $\frac{1}{n}$: désignons ces rectangles par R_n^i et posons $E_n^i = E_n\, R_n^i$. Il est aisé de voir que $F(R)$ est AC sur chaque E_n^i. En effet, on déduit aussitôt de la définition de E_n^i et de (5) l'inégalité:

$$\sum_j |F(R_j)| < n \sum_j |R_j|$$

$\{R_j\}$ étant un système de rectangles, contenant les points de E_n^i et contenues dans R_n^i.

D'autre part, on a $$R = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_n} E_n^i.$$

La fonction $F(R)$ est donc ACG dans R.

Il en résulte que la primitive de Looman est l'intégrale D de sa dérivée.

Streszczenie.

Autor podaje ważniejsze wyniki, zawarte w jego pracy doktorskiej, oraz późniejsze ich uzupełnienia.

Funkcje prostokąta bezwzględnie ciągłe (AC) na zbiorze domkniętym posiadają na nim przyrost określony, co pozwala przedstawić funkcję bezwzględnie ciągłą, jako sumę jej przyrostu na zbiorze i na jego dopełnieniu. Funkcja AC na zbiorze domkniętym jest na nim prawie wszędzie różniczkowalna.

Stąd wynika, że funkcja uogólniona bezwzględnie ciągła (ACG) w pewnym prostokącie jest w nim prawie wszędzie różniczkowalna.

Opierając się na pojęciu funkcji ACG, określamy całkę D, analogiczną do całki Denjoy funkcji jednej zmiennej.

ANTONI ZYGMUND.

Nota o mnożeniu formalnem szeregów trygonometrycznych.

Note on the formal multiplication of trigonometrical series.

§ 1.

Given two trigonometrical series

$$(S) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

$$(T) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx},$$

their formal product ST is the series

$$(ST) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx},$$

where the coefficients C_n are given by the formulae

$$(C) \qquad C_n = \sum_{p+q=n} c_p \gamma_q \text{ [1]}.$$

It is of course assumed that the series (C) are convergent, in the ordinary or in some generalized sense. The series (C) are absolutely convergent if the numbers c_n tend to 0 for $n \to \pm\infty$, and $\Sigma |\gamma_n| < \infty$; these conditions imply $C_n \to 0$ [2].

---

[1]) The theory of the formal multiplication of trigonometrical series was developed by A. Rajchman in his papers: „On Riemann's principle of localization" (in Polish), *Comptes Rendus de la Soc. Scient. de Varsovie,* **11**, 1918, and „Sur la multiplication des séries trigonométriques", *Math. Annalen*, **95**, 389-408. Cf. also A. Zygmund, „Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques", *Math. Zeitschrift*, 24, 1925, p. 47-104, and the same author's „Trigonometrical Series", (*Monografie Matematyczne*, V), Warszawa 1935. The latter book will be quoted *TS*.

[2]) See. e. g. *TS*, p. 279.

In what follows we shall denote by $\bar{S}$ the series conjugate to S, that is the series $-i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\text{sign } n)\, c_n e^{inx}$.

It is well known that, if the coefficients c_n of the series S tend to 0, the product ST converges to 0 at the point x_0, provided that the series T is the Fourier series of a function $\lambda(x)$ such that $\lambda(x_0) = 0$, and that

$$(R_0) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n < \infty, \text{ where } \Gamma_n = \sum_{|\nu| \geq n} |\gamma_\nu|.$$

The latter condition, which we shall call condition (R_0), is satisfied if e. g. $\gamma_n = O(|n|^{-2-\delta})$, $\delta > 0$. It may be relaxed, but not essentially [1]). The chief object of this note is to show that, if the function $\lambda(x)$ vanishes in some interval containing the point x_0, the conditions concerning the coefficients γ_n may be relaxed considerably. More precisely, we have the following theorems:

Theorem 1. *If the coefficients c_n of the series S tend to 0 for $|n| \to +\infty$, and if the series T is absolutely convergent and is the Fourier series of a function vanishing in an interval (a, b), the product ST, as well as the series $\overline{ST}$, are uniformly convergent in every interval interior to (a, b), the sum of ST being 0.*

Theorem 2. *Let us assume that* a) *the series T is absolutely convergent and so is the Fourier series of a function $\lambda(x)$,* b) *there is a function $\mu(x)$ whose Fourier coefficients satisfy the condition (R_0), and which is equal to $\lambda(x)$ in the interval (a, b). Then, if $c_n \to 0$, the formal product ST is in every interval interior to (a, b) uniformly equiconvergent with the series $\lambda(x) S$. The series $\overline{ST}$ is in every interval interior to (a, b) uniformly equiconvergent with the series $\lambda(x) \bar{S}$, but in the wider sense.*

The proof of Theorem 1 will be based on the fact that, if the coefficients of the series S tend to 0, and T and U are absolutely convergent trigonometrical series, then

$$(ST)\, U = S\, (TU).$$

In other words, the formal multiplication is *associative.*

The proof is immediate. For let c_n, γ_n, δ_n denote respectively the coefficients of the series S, T, U. The coefficients of the series ST tend to 0, an so the product $(ST)\, U$ is defined. Its n-th coefficient is equal to

$$\sum_{q+t=n} \Big(\sum_{r+s=q} c_r \gamma_s \Big) \delta_t = \sum_{r+s+t=n} c_r \gamma_s \delta_t .$$

---

[1]) Cf. § 2 of this note.

On the other hand, the series TU being absolutely convergent, the product $S\,(TU)$ is also defined, and its n-th coefficient is equal to

$$\sum_{r+q=n} \Big(\sum_{s+t=q} \gamma_s \delta_t \Big) c_r = \sum_{r+s+t=n} c_r \gamma_s \delta_t .$$

This proves our assertion.

Passing on to the proof of Theorem 1, we denote by $\xi\,(x)$ the function vanishing outside (mod $2\,\pi$) the interval (a, b), equal to 1 in the interval $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$, and having Fourier coefficients $O\,(|n|^{-3})$. On account of the remark just made, and denoting the Fourier series of a function $f(x)$ by $\mathbf{S}[f]$, we have

$$(ST)\ \mathbf{S}\,[\xi] = S\,(T\ \mathbf{S}\,[\xi]) = S\ \mathbf{S}\,[0],$$

since the product $\lambda\,(x)\ \xi\,(x)$ vanishes identically. Hence the product $(ST)\ \mathbf{S}\ [\xi]$ converges uniformly to 0. Since $\xi\,(x) = 1$ in $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, it follows from the known results on the formal multiplication of trigonometrical series[1]) that the series ST converges uniformly to 0 in the interval $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$. This implies the uniform convergence of the series $\overline{ST}$ in the interval $(a+2\,\varepsilon,\ b-2\,\varepsilon)$[2]), and so Theorem 1 is established.

In order to prove Theorem 2 we observe that

$$ST = S\ \mathbf{S}\ [\lambda] = S\ \mathbf{S}\ [\lambda - \mu] + S\ \mathbf{S}\ [\mu].$$

On account of Theorem 1, the product $S\ \mathbf{S}\ [\lambda - \mu]$ converges uniformly to 0 in every interval $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$. By known results[3]) the series $S\ \mathbf{S}\ [\mu]$ is uniformly equiconvergent with $\mu\,(x)\ S$, and so in the interval (a, b) uniformly equiconvergent with $\lambda\,(x)\ S$. Similarly we prove the second part of the theorem.

The above argument may be extended to the case when the coefficients c_n of S are $o\,(|n|^k)$, where $k > 0$. If

$$\sum |n|^k\,|\gamma_n| < \infty,$$

then the series (C) are absolutely convergent, and it can easily be shown that $C_n = o\,(|n|^k)$. Let l be the least integer $\geq k$. It is known that, if T is $\mathbf{S}\ [\lambda]$, where $\lambda'(x_0) = \lambda''(x_0) = \ldots = \lambda^{(l)}(x_0)$, and if the coefficients γ_n satisfy a certain condition, which we shall call condition (R_k), and which need not be precised here[4]), then the product ST is at the point x_0 equisummable (C, k) with the se-

---

[1]) See e. g. *TS*, p. 280. [2]) *TS*, p. 286. [3]) *TS*, p. 280.

[4]) See A. Zygmund, *Math. Zeitschrift, loc. cit.* It is sufficient to suppose that $\gamma_n = O\,(|n|^{-2l-3})$.

ries $\lambda(x) S$; if, in particular, the function $\lambda'(x)$ vanishes at every point x_0 of an interval, the equisummability is uniform in that interval. Using these, and the corresponding results for the conjugate series, and applying the foregoing argument, we easily prove the following two theorems:

Theorem 3. *If $c_n = o(n^k)$, $\Sigma |n|^k |\gamma_n| < \infty$, where $k \geq 0$, and if $T = \mathbf{S}[\lambda]$, where $\lambda(x) = 0$ for $a \leq x \leq b$, then the series ST and $\overline{ST}$ are both uniformly summable (C, k) in every interval interior to (a, b), the sum of ST being 0.*

Theorem 4. *If $c_n = o(n^k)$, $\Sigma |n|^k |\gamma_n| < \infty$, where $k \geq 0$, and if $T = \mathbf{S}[\lambda]$, $\lambda(x) = \mu(x)$ for $a \leq x \leq b$, where the Fourier coefficients of the function $\mu(x)$ satisfy the condition (R_k), then the series $ST - \lambda(x) S$ and $\overline{ST} - \lambda(x) \overline{S}$ are both uniformly summable (C, k) in every interval interior to (a, b), the sum of the former series being 0.*

§ 2.

In connection with the results established in § 1, the following remarks (which are not very deep) may be made. The theorems on formal multiplication may, of course, be established for ordinary series. Let

$$(A) \quad a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad (B) \quad b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots$$

be any two series, and let

$$(C) \quad c_0 + c_1 + \ldots + c_n + \ldots, \qquad \textit{where} \quad c_n = a_0 b_1 + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0,$$

be their product. We may then state the following theorem.

A necessary and sufficient condition that the product (C) of the series (B) by any series (A) with coefficients tending to 0 should be convergent, is that

a) *the series (B) should be convergent to 0, and that*

b) *the series $\Sigma |R_n|$ should be convergent, where R_n ist the n-th remainder of the series (B). If these conditions are satisfied, the product (C) converges to 0.*

This follows at once from the following theorem of Schur:[8]) given an infinite matrix $\{\alpha_{n\nu}\}$, a necessary and sufficient condition that the sequence

$$y_n = \alpha_{n0} x_0 + \alpha_{n1} x_1 + \ldots + \alpha_{n\nu} x_\nu + \ldots$$

[1]) I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, *Journ. für Math.* **151** (1921), pp. 79-111, esp. p. 85.

should converge for any sequence $\{x_\nu\}$ tending to 0, ist that the sums $\sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha_{n\nu}|$ should be bounded and that $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n\nu}$ should exist for every value of ν. In our case it is sufficient to observe that

$$C_n = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \dots + a_n B_0,$$

where B_n and C_n denote respectively the partial sums of the series (B) and (C), and that $B_n = -R_{n+1}$.

(A similar argument shows that a necessary and sufficient condition that the product of the series (B) by any series (A) with coeffients $o(n^k)$, $k \geq 0$, should be summable (C, k), ist that $\sum_{n=0}^{\infty} |B_n^{(k)}| < \infty$, where $B_n^{(k)}$ denotes the k-th Cesàro sums (*not* means) of the series (B).

The above remarks may be extended to the formal multiplication of trigonometrical series, although the results are then less simple. Confining our attention to the case of coefficients tending to 0, and assuming for simplicity that $x_0 = 0$, we may state the following theorem.

A necessary and sufficient condition that the formal product of the series T by any series S with coefficients tending to 0 *should converge at the point* 0, *is that the series T should converge absolutely, that* $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \gamma_\nu = 0$, *and that the sums*

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{\nu=-n-p}^{n-p} \gamma_\nu \right|$$

should be bounded for $n \to +\infty$.

Streszczenie.

Praca zawiera pewne uzupełnienia znanych twierdzeń o mnożeniu formalnem szeregów trygonometrycznych. Typowem dla wyników jest twierdzenie 1 pracy, które brzmi jak następuje:

Jeżeli $c_n \to 0$ *dla* $n \to \pm\infty$, *oraz* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\gamma_n| < +\infty$, *i jeżeli* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx} = 0$ *w przedziale* $a \leq x \leq b$ *o długości dodatniej, to iloczyn formalny szeregów*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad i \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$$

jest jednostajnie zbieżny do zera w każdym przedziale całkowicie wewnętrznym do (a, b).

TABLE DES MATIÈRES